Instituto Tecnológico de Costa Rica
TEC| ESCUELA DE MATEMÁTICA CÁLCULO SUPERIOR

Semana 14: Integral de Línea - III

Campos conservativos. Teorema fundamental. Teorema de Green

W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."
http://www.matematicainteractivacr.com/

Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita Wolfram CDFPlayer
https://www.wolfram.com/cdf-player/

Wolfram CDF Player

Contenido

13.1 Campos conservativos. Teorema fundamental.

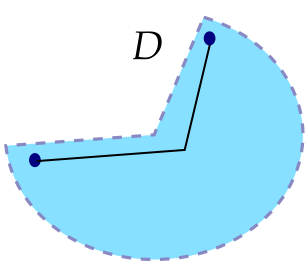
Una condición para que la integral de línea no dependa de la trayectoria que une a A con B es que exista φ tal que $F = \nabla\varphi$ con $\varphi \in C^1$. En este caso podemos calcular la integral de línea usando cualquier camino que una A con B o también, usando el Teorema Fundamental para la integral de línea.

Definición 13.1

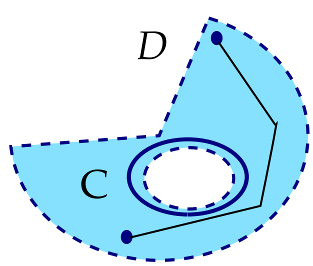
Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice *conexo* si todo par de puntos de D se pueden unir con una curva regular a trozos contenida en D. Es decir, D es de "una sola pieza".

Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo se dice *simplemente conexo* si toda curva cerrada simple C en D, encierra una región que está también en D. Es decir, los conjuntos simplemente conexos no tienen "agujeros".

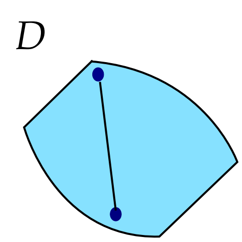
Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice *convexo* si para todo par de puntos $A, B \in D$, el segmento de recta que une A con B está contenido en D, es decir, $\{A + t(B - A) : t \in [0,1]\} \subset D$.



D es simplemente conexo, pero no convexo



D es conexo pero no simplemente conexo



D es convexo

Definición 13.2

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido sobre un conjunto abierto U. Si φ es una función diferenciable sobre U tal que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, decimos que φ es una función potencial de $\mathbf{F}$. También decimos que $\mathbf{F}$ es conservativo.

Si U es conexo y $\mathbf{F}$ conservativo, las funciones potenciales de $\mathbf{F}$ son iguales salvo constantes. También se puede mostrar que si $\mathbf{F} = (P, Q)$ y si $P_y \neq Q_x$, entonces $\mathbf{F}$ no es conservativo (no tiene función potencial). La condición $P_y = Q_x$ *es solo necesaria* para que $\mathbf{F}$ sea conservativo. La condición es *necesaria y suficiente* si U es *simplemente conexo*[1].

Teorema 13.1 (Test de derivadas mixtas).

Sea $\mathbf{F} = P\ \hat{\imath} + Q\ \hat{\jmath}$ es de clase C^1 en un conjunto simplemente conexo D del plano. Decimos que $\mathbf{F}$ es *conservativo* sii

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Sea $\mathbf{F} = P\ \hat{\imath} + Q\ \hat{\jmath} + R\ \hat{k}$ es de clase C^1 en un conjunto simplemente conexo D del espacio. Decimos que $\mathbf{F}$ es *conservativo* sii

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Teorema 13.2 (Teorema Fundamental para integrales de línea).

Sea $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 donde D es conexo y abierto. Sea C una curva regular a trozos en D parametrizada por $\mathbf{r}$ y sean $A = \mathbf{r}(a)$ y $B = \mathbf{r}(b)$; se tiene

$$\int_C \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Teorema 13.3 (Campos conservativos).

Sea D simplemente conexo. Sea C una curva orientada y simple contenida en D y parametrizada por $\mathbf{r}$. Suponemos que C inicia en A y termina en B. Sea $\mathbf{F}$ un campo definido en D.

- $\mathbf{F}$ es conservativo $\iff$ existe φ de clase C^1 tal que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, sobre D.

[1] Un conjunto D es *simplemente conexo* si cualquier curva cerrada contenida en D tiene todo su interior contenido en D, es decir, si está formado por una sola pieza y no contiene "agujeros" (un punto cuenta como un agujero).

- Si $\mathbf{F}$ es conservativo, existe φ de clase C^1 tal que $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$

- **(Independencia del camino)** Si $\mathbf{F}$ es conservativo, $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde C' es cualquier curva, contenida en D, regular a trozos y que va de A a B.

- $\mathbf{F}$ es conservativo $\iff$ $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para *cualquier* curva cerrada simple C contenida en D.

Observe que si $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para *alguna* curva cerrada simple C, esto no significa que $\mathbf{F}$ sea conservativo. El la parte 3. del ejemplo **??** tenemos un campo con integral nula sobre una elipse pero que no es conservativo.

Ejemplo 13.1

Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x\ln(yz) - 5ye^x)\ \hat{\imath} + \left(\dfrac{x^2}{y} - 5e^x\right)\ \hat{\jmath} + \left(\dfrac{x^2}{z} + 2z\right)\ \hat{k}$ y sea C una curva simple que une $A = (2,2,1)$ con $B = (3,1,e)$. Calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

Solución: $\mathbf{F}$ es de clase C^1 en la región $D = \{(x,y,z):\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$. Esta región es simplemente conexa.

El campo es conservativo en esta región pues,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -5e^x + 2x/y = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = 2x/z = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Luego, podemos calcular la integral de línea usando un camino C' en D que una A con B o también podemos calcular una función potencial φ y usar el teorema fundamental para integrales de línea.

En este caso vamos a calcular la integral usando una función potencial φ. Como $\nabla\varphi = F$ entonces $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$, y $\varphi_z = R$.

$$\begin{array}{lcl}
\varphi_x = 2x\ln(yz) - 5ye^x & \Longrightarrow & \varphi(x,y,z) = \displaystyle\int 2x\ln(yz) - 5ye^x\,dx = x^2\ln(yz) - 5ye^x + K_1(y,z). \\
\varphi_y = \dfrac{x^2}{y} - 5e^x & \Longrightarrow & \varphi(x,y,z) = \displaystyle\int \dfrac{x^2}{y} - 5e^x\,dy = x^2\ln y - 5ye^x + K_2(x,z). \\
\varphi_z = \dfrac{x^2}{z} + 2z & \Longrightarrow & \varphi(x,y,z) = \displaystyle\int \dfrac{x^2}{z} + 2z\,dz = x^2\ln z + z^2 + K_3(x,y).
\end{array}$$

Observemos que $x^2\ln y + x^2\ln z = x^2\ln(yz)$. Recolectando primitivas podemos adivinar que

$$\varphi(x,y,z) = x^2\ln(yz) - 5ye^x + z^2 + K$$

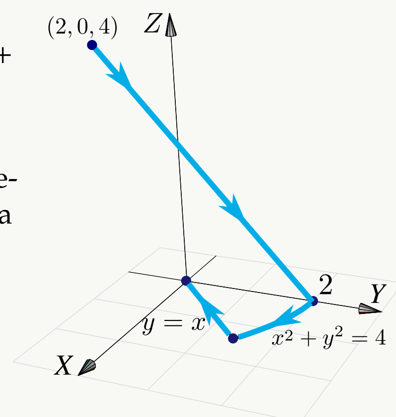
lo cual podemos aceptar *después de verificar* que $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$, y $\varphi_z = R$. Finalmente,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A) = -5e^3 + 11e^2 + 8 - 4\log(2) \approx -13.9207.$$

Ejemplo 13.2

Considere el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x,y,z) = 4xe^z\ \hat{\imath} + \cos(y)\ \hat{\jmath} + 2x^2e^z\ \hat{\mathbf{k}}$. Sea C la curva de la figura. Calcule $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

Solución: $\mathbf{F}$ es de clase C^1 sobre $D = \mathbb{R}^3$ que es simplemente conexa. Dichosamente no tenemos que integrar sobre la curva C pues $\mathbf{F}$ es conservativo. En efecto



$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 4xe^z = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad y \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Figura 13.1: Curva C.

En este ejemplo vamos a calcular la integral de dos maneras distintas: usando una función potencial y también usando un camino C'.

Primer Manera: Con un camino C' que inicia en $(2,0,4)$ y termina en $(0,0,0)$. El camino que hemos escogido se ve en la figura.

$$\begin{cases} -C_1 & : \ \mathbf{r}_1(t) = (t,0,4) \text{ con } t \in [0,2] \\ -C_2 & : \ \mathbf{r}_2(t) = (0,0,t) \text{ con } t \in [0,4] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &= -\int_0^2 \mathbf{F}(t,0,4)\cdot \mathbf{r}_1'(t)\,dt - \int_0^4 \mathbf{F}(0,0,t)\cdot \mathbf{r}_2'(t)\,dt \\ &= -\int_0^2 (4e^4t, 1, 2e^4t^2)\cdot(1,0,0)\,dt - \int_0^4 (0,1,0)\cdot(0,0,1)\,dt \\ &= -\int_0^2 4te^4 dt = -8e^4. \end{aligned}$$

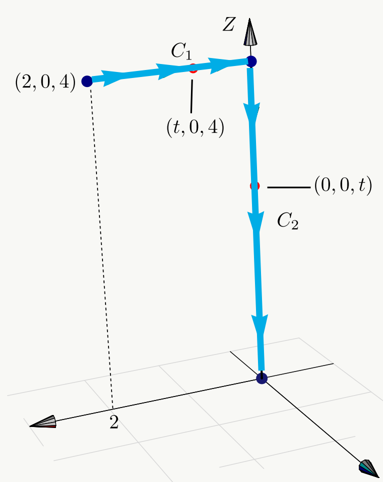


Figura 13.2: Curva $C' = C_1 \cup C_2$.

Segunda Manera: Con una función potencial.

$$\begin{cases} \varphi_x = 4xe^z \implies \varphi(x,y,z) = \int 4xe^z\,dx = 2x^2e^z + K_1(y,z), \\ \varphi_y = \cos(y) \implies \varphi(x,y,z) = \int \cos y\,\,dy = \operatorname{sen} y + K_2(x,z), \\ \varphi_z = 2x^2e^z \implies \varphi(x,y,z) = \int 2x^2e^z\,dz = 2x^2e^z + K_3(x,y). \end{cases} \implies \varphi(x,y,z) = 2x^2e^z + \operatorname{sen} y + C$$

Finalmente, $\int_C F\cdot\,dr = \varphi(0,0,0) - \varphi(2,0,4) = -8e^4$.

N La condición *"simplemente conexo"* para que F sea conservativo. Sea $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ definido en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Se verifica que $P_y = Q_x$ pero

$$\int_C F\cdot dr = 2\pi \text{ si C es la circunferencia } x^2+y^2=1,$$

lo cual indica que F no tiene función potencial.

Lo mismo pasa si consideramos $F(x,y,z) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ para $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

El problema en principio es que se requiere que F esté definido en una región simplemente conexa, *pero la explicación detallada de este fenomeno con el campo* F *es una cuestión topológica* que tiene que ver con homotopias. Un artículo sencillo de leer sobre esto, lo puede encontrar en V. Pati, "How Topology Governs Analysis" `http://www.isibang.ac.in/~statmath/stinc/database/notes/puncturedplane.pdf`

13.2 Ejercicios

Ⓡ **13.2.1** Sea F un campo de fuerzas tal que $F(x,\ y,\ z) = (2xy + z^3)\,\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath} + 3xz^2\ \hat{k}$.

a.) Demostrar que F es un campo de fuerzas conservativo.

b.) Hallar una función potencial de F.

c.) Determinar el trabajo realizado para desplazar un cuerpo en este campo desde la posición $(1,1,1)$ hasta $(1,1,2)$.

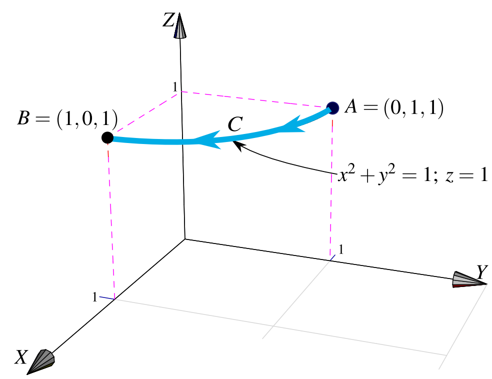
Ⓡ **13.2.2** Sea F un campo de fuerzas tal que $F(x,\ y,\ z) = (yz - y^2 + 2xz)\ \hat{\imath} + (xz - 2xy)\ \hat{\jmath} + (xy + x^2)\ \hat{k}$.

a.) Demostrar que F es un campo de fuerzas conservativo.

b.) Hallar una función potencial de F.

c.) Determinar el trabajo realizado para desplazar un cuerpo en este campo desde la posición $(0,1,0)$ hasta $(-1,-1,0)$.

Ⓡ **13.2.3** Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x+5)\ \hat{\imath} + (3y^2)\ \hat{\jmath} + \dfrac{1}{z}\ \hat{k}$
y $\mathbf{C}$ la trayectoria que va de $A = (0,1,1)$ hasta $B = (1,0,1)$ de acuerdo a la figura de la derecha.



a.) Verifique que el campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo.

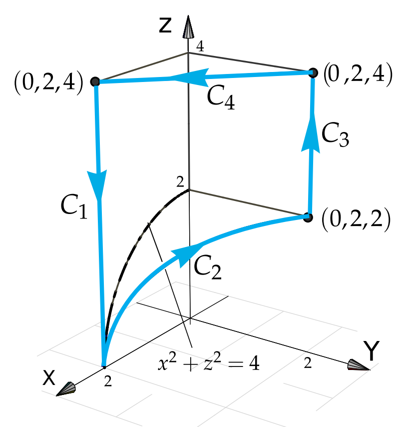
b.) Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ utilizando una función potencial.

c.) Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, ***sin usar*** una función potencial.

Ⓡ **13.2.4** Sea $\mathbf{F}$ definido por

$$F(x,y,z) = x\ \hat{\imath}\ -\ y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{k}$$

y $\mathbf{C} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ la curva que se muestra en la figura de la derecha.



a.) Verifique que el campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo.

b.) Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ utilizando una función potencial.

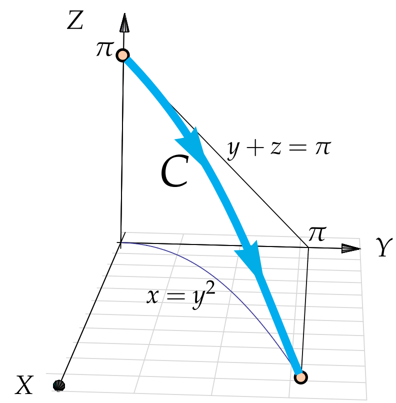
c.) Calcule la integral de línea $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ sin usar una función potencial.

Ⓡ **13.2.5** Sea F un campo de fuerzas tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(y\cos(xy) + \frac{1}{x+1},\ x\cos(xy),\ \frac{1}{z+1} \right).$$

a.) Demostrar que F es un campo de fuerzas conservativo.

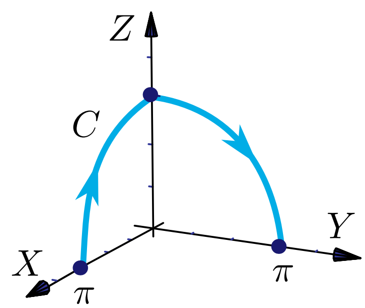
b.) Calcule la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$



Ⓡ **13.2.6** Considere el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz^2 - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\pi - y),\ xz^2 - \cos(\pi - y)\cos x,\ 2xyz)$ y sea C la curva que une los puntos $(\pi, 0, 0)$ con $(0, \pi, 0)$, como se ve en la figura

a.) Verifique que $\mathbf{F}$ es conservativo.

b.) Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ usando una función potencial.



Ⓡ **13.2.7** Sea $\mathbf{F}$ definido por

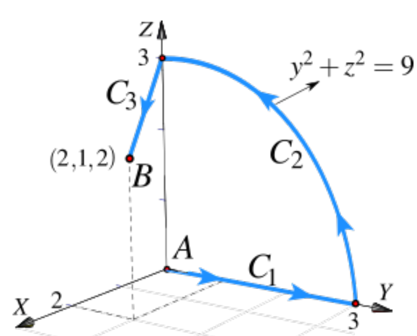
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz + y\cos(xy))\ \hat{\mathbf{\imath}} + (xz + x\cos(xy))\ \hat{\mathbf{\jmath}} + xy\ \hat{\mathbf{k}}$$

y $\mathbf{C}$ la trayectoria que va de A hasta B de acuerdo a la figura de la derecha.

a.) Verifique que el campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo.

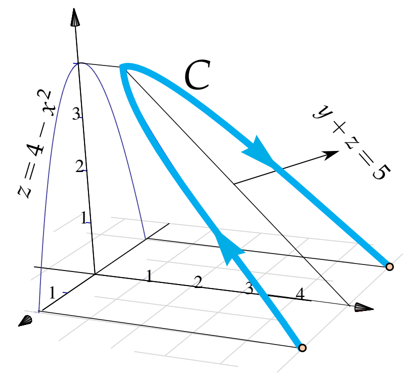
b.) Calcule la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ utilizando una función potencial.

c.) Calcule la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sin usar una función potencial.



Ⓡ **13.2.8** Sea F un campo de fuerzas tal que

$F(x,\ y,\ z) = -(2x{+}3x^2z^2)\ \hat{\imath} - (2y{+}3y^2z^4)\ \hat{\jmath} - (2x^3z{+}4y^3z^3)\ \hat{k}$



a.) Demostrar que F es un campo de fuerzas conservativo.

b.) Calcule la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Ⓡ **13.2.9** (*) Sea $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ definido en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Verifique que $P_y = Q_x$ pero sin embargo, $\displaystyle\int_C F \cdot dr = 2\pi$ si C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

13.3 Teorema de Green (en el plano).

El siguiente teorema, llamado "Teorema de Green en el plano", aplica para regiones planas limitadas por curvas cerradas y simples, regulares a trozos. Una idea intuitiva, en términos de "circulación", se puede ver en la sección ??.

Teorema 13.4 (Teorema de Green en el plano).

Sean P y Q campos escalares derivables con continuidad en un conjunto abierto S del plano XY. Sea C una curva simple cerrada regular a trozos y sea D la región encerrada por C (es decir, $C = \partial D$). Si D está contenida en S, se tiene la identidad

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

donde C es recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj.

• Intuitivamente, C es recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj si al caminar a lo largo de C la región D está siempre a la izquierda. Notar que $C = \partial D$ indica que C es la *frontera* de D.

Ejemplo 13.3

Calcular $\int_C y^2 dx + x^2 dy$ si C es la curva de la figura.

Solución:

En este caso, $P(x,y) = y^2$ y $Q(x,y) = x^2$. Como se cumplen las condiciones del teorema de Green entonces,

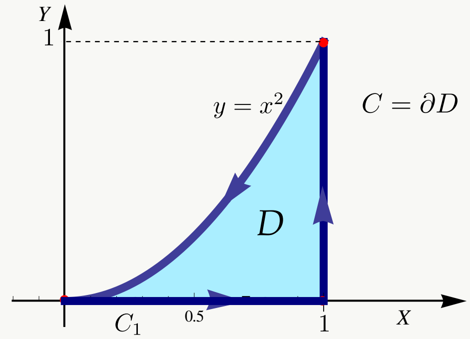
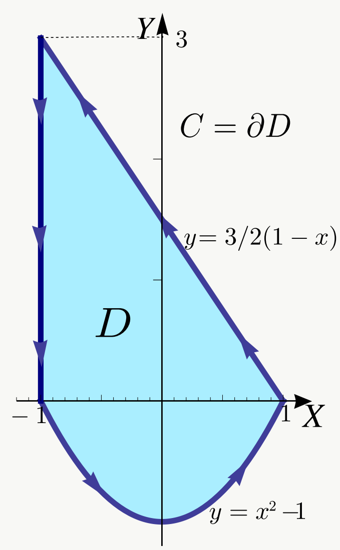


Figura 13.3: Curva $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

$$\begin{aligned}
\int_C y^2 dx + x^2 dy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dA \\
&= \int_0^1 \int_0^{x^2} 2x - 2y \, dy\, dx \\
&= \int_0^1 2x^3 - x^4 \, dx = \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

Ejemplo 13.4

Calcular $\int_C (x+y)dx + (3x + \arctan y)\, dy$ si C es la curva de la figura.

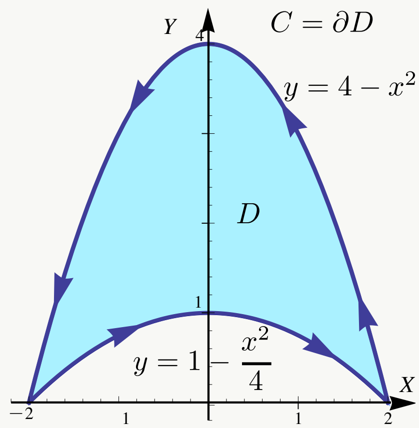


Solución: En este ejemplo, $P(x,y) = x + y$ y $Q(x,y) = 3x + \arctan(y)$. Como se cumplen las condiciones del teorema de Green, entonces

$$\begin{aligned}
\int_C (x+y)dx + (3x + \arctan y)\, dy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dA \\
&= \int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^{\frac{3-3x}{2}} 3 - 1 \, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^1 5 - 3x - 2x^2 \, dx = \frac{26}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 13.5

Calcular $\int_C (x + \operatorname{arcsen} x)dx + (2x + \ln(y^2 - 3))\, dy$ si C es la curva de la figura.

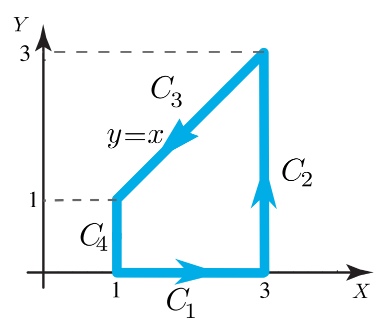


Solución: En este ejemplo, $P(x,y) = x + \operatorname{arcsen} x$ y $Q(x,y) = 2x + \ln(y^2 - 3)$. Como se cumplen las condiciones del teorema de Green podemos poner

$$\begin{aligned}
\int_C (x + \operatorname{arcsen} x)dx + (2x + \ln(y^2 - 3))\, dy &= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dA \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{1-x^2/4}^{4-x^2} 2\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} 6 - \frac{3\,x^2}{2}\, dx = 16.
\end{aligned}$$

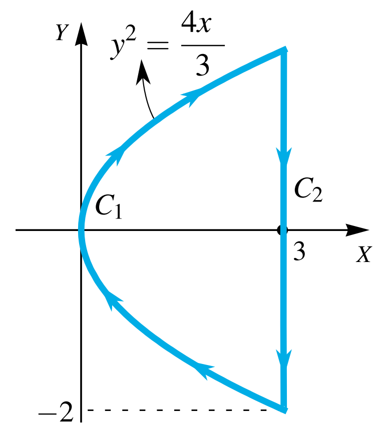
13.4 Ejercicios

Ⓡ **13.4.1** Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x,y) = (x + y)\ \hat{\imath} - (x^2 + y^2)\ \hat{\jmath}$. La curva C es la frontera del trapecio limitado por las curvas $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$ y $y = x$ como se muestra en la figura.



a.) Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ usando el teorema de Green.

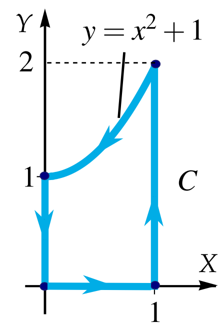
b.) Calcular la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ **sin utilizar** el teorema de Green.



Ⓡ **13.4.2** Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y) = x\ \hat{\imath} + (x+y^2)\ \hat{\jmath}.$$

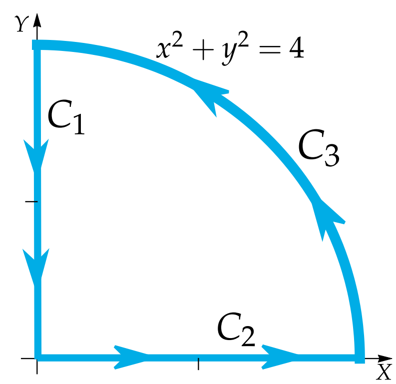
Calcular $\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2$ tal y como se muestra en la figura a la derecha.



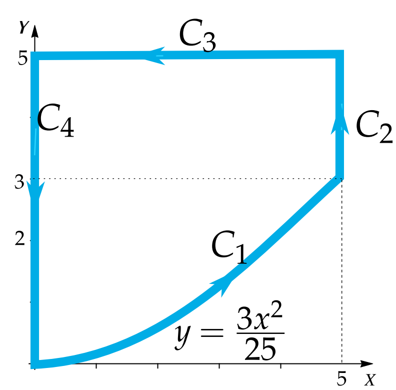
Ⓡ **13.4.3** Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y\ \hat{\imath} + x^2\ \hat{\jmath}$$

Calcule la integral de línea $\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{C}$ es la curva que se muestra en la figura a la derecha



Ⓡ **13.4.4** Calcule la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r}$ donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, y y $F(x,\,y) = (xy^2 + \sqrt{2+\cos x})\ \hat{\imath} + (yx^2 - ye^{\operatorname{sen} y})\ \hat{\jmath}$



Ⓡ **13.4.5** Calcule $\int_C (4y + \arctan(x/5)\,dx + (x^2 + \ln(y+1))\,dy$ donde C es el camino representado en la figura a la derecha.

13.5 Área como una integral de línea.

Si $P(x,y) = 0$ y $Q(x,y) = x$ entonces $Q_x - P_y = 1$, aplicando el teorema de Green (si se cumplen las condiciones) obtenemos otra manera para calcular el área de A_D siendo la frontera de la región D una curva orientada contra-reloj.

$$\oint_C 0\,dx + x\,dy = \iint_D 1\,dA = A_D$$

Lo cual puede ser conveniente si la integral de línea no ofrece gran dificultad.

Teorema 13.5

Si D es una región plana limitada por una curva C, cerrada simple, regular a trozos y orientada contra-reloj, entonces el área de D viene dada por

$$A_D = \oint_C x\,dy$$

Ejemplo 13.6

Calcular el área de la región encerrada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución: Parametrizamos la elipse con $\mathbf{r}(t) = a\cos t\ \hat{\imath} + b\,\text{sen}\,t\ \hat{\jmath}$ con $t \in [0, 2\pi[$. Esta parametrización orienta la elipse contra-reloj. En este caso, $x = a\cos t$ mientras que $y = b\,\text{sen}\,t$ y $dy = b\cos t\,dt$,

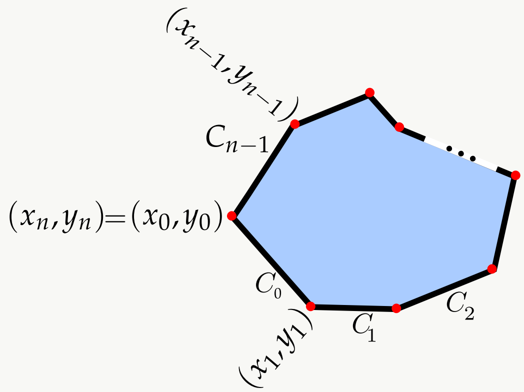
$$A_D = \int_C x\,dy = \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t\,dt = \pi ab.$$

Ejemplo 13.7 (Área de un polígono simple).

Verifique que el área de un polígono simple de n vértices $\{(x_0,y_0),...,(x_{n-1},y_{n-1})\}$ es

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1}+x_k)(y_{k+1}-y_k)}{2}$$

Asumimos que $(x_0,y_0) = (x_n,y_n)$.



Solución: El área del polígono es, por el teorema de Green en el plano,

$$A_P = \oint_C x\,dy \;=\; \iint_D 1\,dA$$

Aquí $C = C_1 + C_2 + ... + C_{n-1}$ y cada segmento C_i está parametrizado por

$$\mathbf{r}_i(t) = ((x_{k+1} - x_k)\,t + x_k\;,\;(y_{k+1} - y_k)\,t + y_k)\;\text{ con } t \in [0,1],$$

entonces,

$$A_P = \oint_C x\,dy \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \oint_{C_i} (y_{k+1} - y_k)\,[(x_{k+1} - x_k)\,t + x_k]\;dt \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} + x_k)(y_{k+1} - y_k)}{2}$$

Revisado: Marzo, 2022

Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF:
https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

http://www.matematicainteractivacr.com/

13.6 Solución de los ejercicios

13.2.1

13.2.2 Una función potencial es $\phi(x,y,z) = xyz - y^2x + x^2z$

13.2.3

(a) Como $\text{Rot}\mathbf{F} = (0,0,0)$, entonces $\mathbf{F}$ es conservativo sobre cualquier región simplemente conexa donde $z \neq 0$.

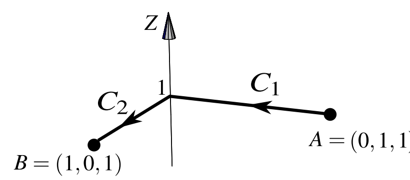
(b) $$\nabla\phi = F \implies \begin{array}{lclcl} \phi & = & \int 2x+5\,dx & = & x^2+5x+K_1(y,z) \\ \phi & = & \int 3y^2\,dy & = & y^3+K_2(x,z) \\ \phi & = & \int \frac{1}{z}\,dz & = & \ln|z|+K_3(x,y) \end{array} \implies \phi(x,y,z) = x^2+5x+y^3+\ln z.$$

Luego, $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \;=\; \phi(B)-\phi(A) \;=\; 6-1 \;=\; 5$

(c) Como $\mathbf{F}$ es conservativo en regiones simplemente conexas, donde z no se anula, podemos tomar el camino $C' = C_1 + C_2$ para integrar.

$-C_1 \;:\; \mathbf{r}_1(t) = (0,t,1)$ con $t \in [0,1]$. $\quad \mathbf{r}_1'(t) = (0,1,0)$

$C_2 \;:\; \mathbf{r}_2(t) = (t,0,1)$ con $t \in [0,1]$. $\quad \mathbf{r}_2'(t) = (1,0,0)$



Entonces,
$$\int_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \;=\; -\int_0^1 (5,\;3t^2,\;1)\cdot(0,\;1,\;0)\,dt \;+\; \int_0^1 (2t+5,\;0,\;1)\cdot(1,\;0,\;0)\,dt \;=\; -1+6 \;=\; 5$$

13.2.4 $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \;=\; 0$

13.2.5

13.2.6

- $F = (P,Q,R)$ es conservativo pues $P_y = z^2 + \operatorname{sen} x\cos(\pi-y) = Q_x,\;\; \mathbf{r}_y = 2xz = Q_z$ y $\mathbf{r}_x = 2yz = P_z$.

- una función potencial es $\phi(x,y,z) = xyz^2 + \cos(x)\operatorname{sen}(\pi-y) + K$. Por lo tanto

$$\int_C F\cdot d\mathbf{r} = \phi(0,\pi,0) - \phi(\pi,0,0) = 0$$

13.2.7

1.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + y\cos(xy) & xz + x\cos(xy) & xy \end{vmatrix} &= (x-x)\,\hat{\imath} \;+\; (-y+y)\,\hat{\jmath} \\
&\quad +(z+\cos(xy)+xy\cos(xy)-(z+\cos(xy)+xy\cos(xy)))\,\hat{k} \\
&= (0,0,0)
\end{aligned}$$

2. Sea $G(x,y,z)$ una función potencial, así

- $G_x(x,y,z) = yz + y\cos(xy) \implies G(x,y,z) = xyz + \operatorname{sen}(xy) + C_1(y,z)$
- $\dfrac{\partial}{\partial y}(xyz + \operatorname{sen}(xy) + C_1(y,z)) = xz + x\cos(xy) \implies C_{1y}(y,z) = 0 \implies C_1(y,z) = C_2(z)$
- $\dfrac{\partial}{\partial z}(xyz + \operatorname{sen}(xy) + C_2(z)) = xy \implies C_2{}'(z) = 0 \implies C_2(z) = K$

Así, $G(x,y,z) = xyz + \operatorname{sen}(xy) + K$, por lo que

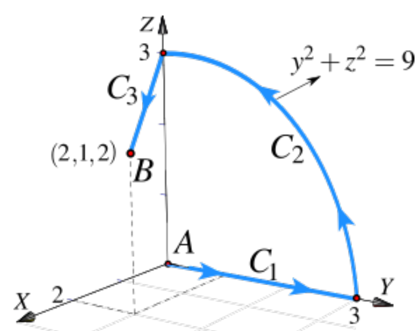
$$\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} = G(0,0,0) - G(2,1,2) = K - (4 + \operatorname{sen}(2) + K) = -4 - \operatorname{sen}(2).$$

3. Se seguirá la siguiente ruta

$-C_1 : \mathbf{r}_1(t) = (2,1,t),\; t \in [0,2]$

$-C_2 : \mathbf{r}_2(t) = (t,1,0),\; t \in [0,2]$

$-C_3 : \mathbf{r}_3(t) = (0,t,0),\; t \in [0,1]$



Así

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} &= -\int_0^2 (t+\cos(2), 2t+2\cos(2), 2)\cdot(0,0,t)\,dt - \int_0^2 (\cos t, t\cos t, t)\cdot(1,0,0)\,dt - \int_0^1 (t,0,0)\cdot(0,1,0)dt \\
&= -\int_0^2 2t\,dt - \int_0^2 \cos t\,dt - 0 \\
&= -t^2\Big|_0^2 - \operatorname{sen} t\Big|_0^2 = -4 - \operatorname{sen}(2)
\end{aligned}$$

13.2.8 Ⓡ Calcule usando el camino que va de $(2,5,0)$ a $(-2,5,0)$

13.2.9 Ⓡ

13.4.1 Ⓡ

a.) $-\dfrac{64}{3}$

b.) $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} + \int_{C_4} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} = 4 - 36 + 28/3 + 4/3 = -\frac{64}{3}$

13.4.2

Como se cumplen las condiciones para aplicar el teorema de Green en el plano, excepto la orientación de la curva, entonces

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} \;=\; -\int_{-2}^{2}\int_{3y^2/4}^{3} 1 \;-\; 0\; dx\, dy \;=\; -8.$$

13.4.3 Por el teorema de Green:

$$\begin{aligned}\int_{nC} \mathbf{F}\cdot\, d\mathbf{r} &= \int_0^1\int_0^{x^2+1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dy\,dx\\ &= \int_0^1\int_0^{x^2+1}(2x-1)\,dy\,dx\\ &= \int_0^1 (2x-1)\,(x^2+1)dx \;=\; \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

13.4.4

13.4.5