

SEMANA 2: Secciones cónicas II

Hipérbola

W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."
<http://www.matematicainteractivacr.com/>



Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita Wolfram CDFPlayer
<https://www.wolfram.com/cdf-player/>

Wolfram CDF Player



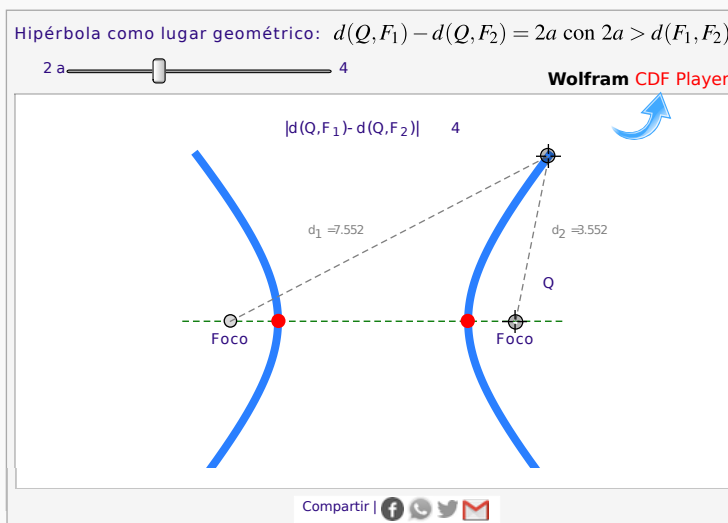
Contenido

2.1 La Hipérbola.	1
2.2 Ejercicios	5
2.3 Solución de los ejercicios	8

2.1 La Hipérbola.

Definición 2.1 (La hipérbola como lugar geométrico).

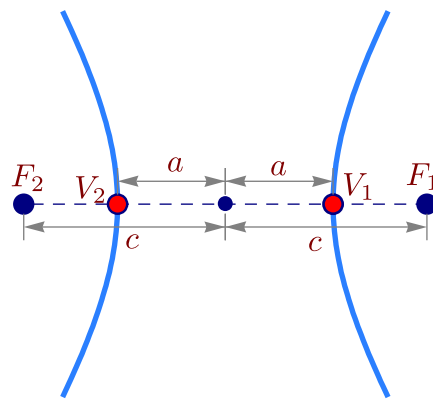
En un plano, una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos Q tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, F_1 y F_2 , (llamados *focos*), es constante (una constante menor que $d(F_1, F_2)$). Si la diferencia es la constante $2a$, con $2a < d(F_1, F_2)$, entonces $|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| = 2a$



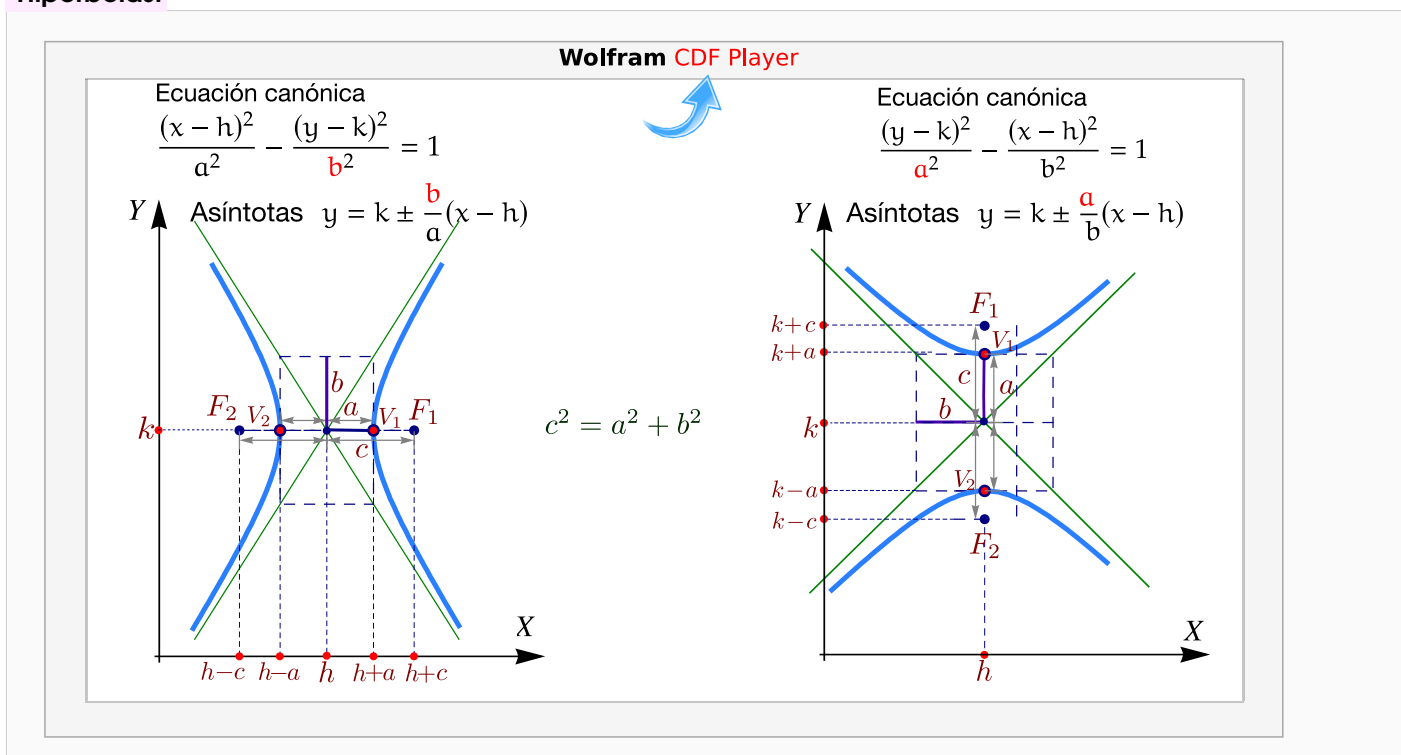
Ejes, centro y vértices. Supongamos que los focos de la hipérbola son F_1 y F_2 . Además, $|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| = 2a$ con $2a < d(F_1, F_2)$. La recta que pasa por los focos se llama *eje focal*. Este eje focal corta a la hipérbola en dos puntos V_1, V_2 llamados *vértices*. El segmento de recta que une los vértices se llama *eje transverso*. El punto medio de este eje se llama *centro* de la hipérbola.

De la definición de la hipérbola se puede deducir que la distancia entre los vértices es $2a$ y cada vértice está a una distancia de a unidades del centro. Si la distancia del centro a cada uno de los focos es c , entonces $c > a$ y

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Hipérbolas.



Ejemplo 2.1

Identifique y trace la gráfica de la cónica de ecuación $4y^2 - 9x^2 + 36x - 24y - 36 = 0$, indicando centro, vértices, focos, asíntotas e intersección con los ejes.

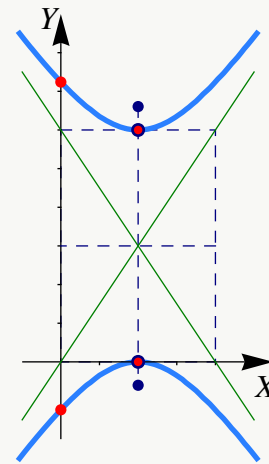
Solución: Completando cuadrados obtenemos

$$4(y - 3)^2 - 9(x - 2)^2 = 36$$

por lo que la ecuación canónica es

$$\frac{(y - 3)^2}{9} - \frac{(x - 2)^2}{4} = 1$$

Se trata de un hipérbola con eje transversal vertical y centro en $(2, 3)$. Como $a = 3$ y $b = 2$ entonces $c = \sqrt{13}$. Los vértices son $v_1 = (2, 0)$ y $v_2 = (2, 6)$ y los focos son $F_1 = (2, 3 - \sqrt{13})$ y $F_2 = (2, 3 + \sqrt{13})$. Las intersecciones con los ejes: $y \approx -1.24$, $y \approx 7.24$ y $x = 2$.



Ejemplo 2.2

Hallar la ecuación canónica, los focos, los vértices y las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es $9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$. Realizar la gráfica.

Solución: Completando el cuadrado en ambas variables,

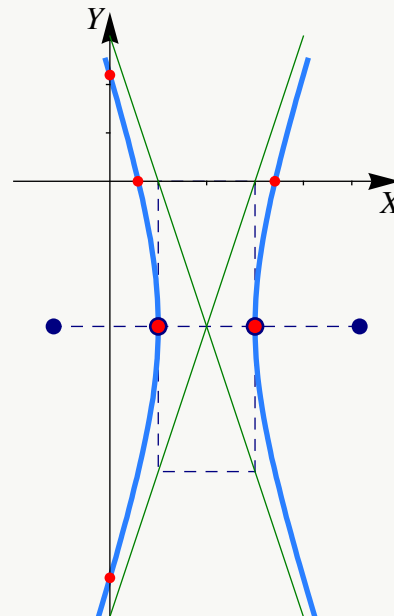
$$9(x^2 - 4x + 4 - 4) - (y^2 + 6y + 9 - 9) + 18 = 0$$

$$9(x - 2)^2 - (y + 3)^2 = 9$$

$$\frac{(x - 2)^2}{1} - \frac{(y + 3)^2}{9} = 1$$

Por tanto,

- el centro está en $(2, -3)$, $a = 1$, $b = 3$ y $c^2 = a^2 + b^2 \implies c^2 = 10 \implies c = \sqrt{10}$
- Los vértices están en $(1, -3)$, $(3, -3)$, los focos en $(2 \pm \sqrt{10}, -3)$
- Las asíntotas son $y = \pm 3(x - 2) - 3$.
- Las intersecciones con los ejes son $y \approx -8.19$, $y \approx 2.196$, $x \approx 0.58$ y $x \approx 3.41$.



Ejemplo 2.3

Hallar la ecuación canónica de la hipérbola con vértices en $(3, -5)$ y $(3, 1)$ y asíntotas $y = 2x - 8$ y $y = -2x + 4$. Además calcule los focos y realice la gráfica.

Solución: Como los vértices son vértices en $(3, -5)$ y $(3, 1)$, el centro es $(3, -2)$. Además, la hipérbola tiene eje transversal vertical y $a = 3$. Por otro lado, por el teorema de las asíntotas,

$$m_1 = 2 = \frac{a}{b} \implies b = \frac{a}{2} \implies b = \frac{3}{2}$$

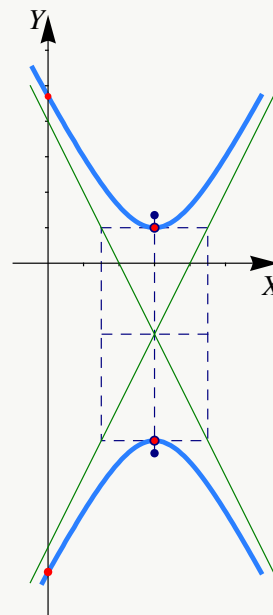
Por tanto, la ecuación canónica es

$$\frac{(y + 2)^2}{9} - \frac{(x - 3)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

El valor de c está dado por

$$c^2 = a^2 + b^2 \implies c^2 = \frac{45}{4} \implies c = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Los focos están en $(3, -2 - \frac{3\sqrt{5}}{2})$ y $(3, -2 + \frac{3\sqrt{5}}{2})$. Las intersecciones con el eje Y son $y \approx -8.70$, $y \approx 4.70$.

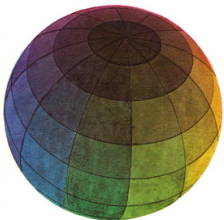


2.2 Ejercicios

- (R) 2.2.1** Determine la ecuación canónica y los demás elementos de las hipérbolas de ecuación
- a.) $36x^2 - 64y^2 = 2304$
- b.) $x^2 - 2x - y^2 - 6y + 9 = 0$
- c.) $-\frac{9}{5} + 2x + x^2 - \frac{6y}{5} - \frac{y^2}{5} = 0$
- d.) $\frac{4x^2}{3} - \frac{16x}{3} - \frac{y^2}{5} + 2y - \frac{2}{3} = 0$
- (R) 2.2.2** Determine la ecuación canónica de la hipérbola con focos en $(1, 4)$ y $(1, -4)$ y con $a = 3$.
- (R) 2.2.3** Determine la ecuación canónica de la hipérbola con centro en $(-4, 1)$ y un vértice en $(2, 1)$ y semieje conjugado de longitud 4.
- (R) 2.2.4** Determine la ecuación canónica de la hipérbola de ecuación $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$.
- (R) 2.2.5** Determine la ecuación canónica de la hipérbola con vértices en $(0, 2)$ y $(6, 2)$ y asíntotas $y = 2/3x \wedge y = 4 - 2/3x$.
- (R) 2.2.6** Determine la ecuación canónica de la hipérbola que contiene al punto $(4, 6)$ y cuyas asíntotas son $y = \pm\sqrt{3}x$.
- (R) 2.2.7** Determine la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y que contiene los puntos $(3, 1)$ y $(9, 5)$.
- (R) 2.2.8** Determine la ecuación canónica y realice la representación gráfica de la hipérbola cuyo eje focal es paralelo al eje X, el centro es $(2, 0)$, una asíntota tiene ecuación $y = 2x - 4$ y un foco está a una distancia de $\sqrt{5}$ unidades del centro.
- (R) 2.2.9** Determine la ecuación canónica de de la hipérbola que satisface simultáneamente las siguientes condiciones,
- a.) El centro de la hipérbola coincide con el vértice de la parábola de ecuación $y^2 - 2y + 8x + 17 = 0$.
- b.) Uno de sus focos se ubica en $(3, 1)$
- c.) Uno de sus vértices se ubica en $(1, 1)$.

Realice la gráfica e indique sus principales características.

- R 2.2.10** Determine el tipo de cónica representada por la ecuación $\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k-16} = 1$ en los casos
- a.) Si $k > 16$
 - b.) Si $0 < k < 16$
 - c.) Si $k < 0$
- R 2.2.11** Determine la ecuación canónica y las características de la cónica que contiene a los puntos $P = (x, y)$ para los cuales $|d(P, A) - d(P, B)| = 2$ donde $A = (-3, 0)$ y $B = (-3, 3)$. Realizar la gráfica.
- R 2.2.12** Realice el dibujo de la sección cónica de ecuación $9(x-1)^2 - (y+1)^2 = 9$. Indique además todas sus características.
- R 2.2.13** En la definición de la hipérbola como un lugar geométrico se indica que $2a < d(F_1, F_2)$. ¿Qué pasa si $2a \geq d(F_1, F_2)$?



Revisado: Marzo, 2022

Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF:
https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

<http://www.matematicainteractivacr.com/>

2.3 Solución de los ejercicios

2.2.1

a.) La ecuación canónica es

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Como $c = 10$, los focos son $(\pm 10, 0)$ y los vértices son $(\pm 8, 0)$. La ecuación de las asíntotas es $3x - 4y = 0$ y $3x + 4y = 0$.

b.) La ecuación canónica es

$$(x - 1)^2 - (y + 3)^2 = 1$$

El o la estudiante debe completar la respuesta.

c.) La ecuación canónica es

$$(x + 1)^2 - \frac{(y + 3)^2}{5} = 1$$

El o la estudiante debe completar la respuesta.

d.) La ecuación canónica es

$$\frac{(x - 2)^2}{3/4} - \frac{(y - 5)^2}{5} = 1$$

El o la estudiante debe completar la respuesta.

2.2.2

La ecuación canónica es $\frac{y^2}{9} - \frac{(x - 1)^2}{7} = 1$.

2.2.3

El centro es $(-4, 1)$. $a = 6$ y $b = 4$. La ecuación canónica es $\frac{(x + 4)^2}{36} - \frac{(y - 1)^2}{16} = 1$.

2.2.4

La ecuación canónica es $\frac{(x - 1)^2}{16} - \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$. Vértices en $(-3, 2)$, $(5, -2)$ y focos en $(-4, -2)$, $(6, -2)$. Las asíntotas son $y = \pm \frac{3}{4}(x - 1) - 2$.

2.2.5

La ecuación canónica es

$$\frac{(x - 3)^2}{9} - \frac{(y - 2)^2}{4} = 1.$$

Como $c = \sqrt{13}$, los focos son $(3 \pm \sqrt{13}, 2)$ y los vértices son $(3 \pm 3, 2)$.

2.2.6



Como $\sqrt{3} \cdot 4 > 6$, la asíntota $y = \sqrt{3}x$ va por arriba del punto $(4, 6)$. Esto nos dice que la ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Como $(4, 6)$ está en la hipérbola y como $b^2 = 3a^2$, entonces $\frac{16}{a^2} - \frac{36}{3a^2} = 1 \implies a = 4$. Así, la ecuación canónica es

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

2.2.7

La opción que sirve es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Evaluando los puntos se obtiene que la ecuación canónica es $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$.

La opción $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ se descarta pues se evaluando los puntos se obtiene $a^2 = -6$.

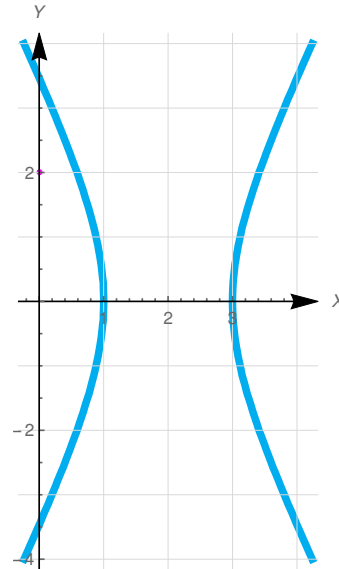
2.2.8   Según los datos, la ecuación de la cónica es



$$\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como una asíntota es $y = 2x - 4 \implies \frac{b}{a} = 2$, entonces tenemos

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = 2 \\ 5 = a^2 + b^2 \end{cases} \implies a = 1 \quad \wedge \quad b = 2$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$$

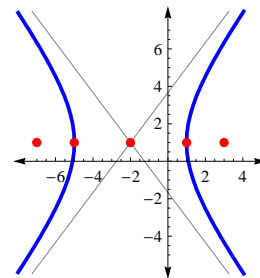


2.2.9   La parábola tiene ecuación canónica $(y-1)^2 = -8(x+2)$, por tanto el centro de la hipérbola es $(-2, 1)$.

Como un foco esta en $(3, 1)$ y un vértice esta en $(1, 1)$, el eje transversal es paralelo al eje X , $a = 3$, $c = 5$ y $b = 4$. La ecuación canónica es

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1.$$

Sus focos son $(3, 1)$, $(-7, 1)$ y sus vértices $(1, 1)$, $(-5, 1)$. Las asíntotas son $y = \pm \frac{4}{3}(x+2) + 1$. La hipérbola interseca al eje X en $x \approx -5.093$ y $x \approx 1.0933$.



2.2.10  

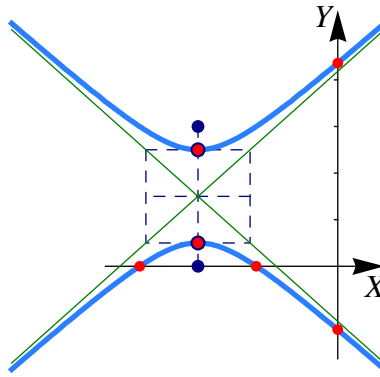
- Como $k > 0$ y $k - 16 > 0$, se trata de una elipse.
- Como $k > 0$ y $k - 16 < 0$, se trata de una hipérbola.
- Como $k < 0$ y $k - 16 < 0$, la ecuación no tiene solución, es decir, no es la ecuación de una curva.



2.2.11   Se trata de un hipérbola con focos A y B y por tanto $c = 1.5$ y el centro es $(h, k) = (-3, 3/2)$.

Como $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ entonces $a = 1$. y entonces $b^2 = 5/4$. Luego ecuación canónica es

$$\frac{(y - \frac{3}{2})^2}{1} - \frac{(x + 3)^2}{5/4} = 1$$

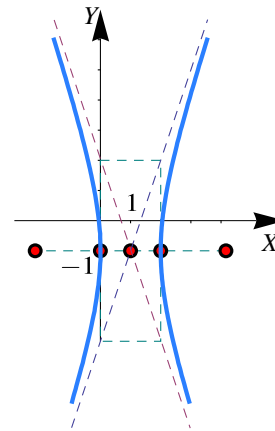
Las asíntotas son $y = \pm \frac{1}{\sqrt{5/4}}(x + 3) + 3/2$. La intersección con los ejes son $y \approx -1.363$, $y \approx 4.363$, $x \approx -4.25$ y $x \approx -1.75$,



2.2.12   Se trata de una hipérbola.

La ecuación canónica es $(x - 1)^2 - \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$.

- Centro $(1, -1)$,
- $a^2 = 1$ y $b^2 = 9$,
- $c^2 = 1 + 9 \implies c = \sqrt{10}$,
- Focos $(1 \pm \sqrt{10}, -1)$.
- Asíntotas: $y = \pm \frac{3}{1}(x - 1) - 1$.



2.2.13  