SEMANA 4: DERIVADAS PARCIALES

Derivadas Parciales

W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."
http://www.matematicainteractivacr.com/

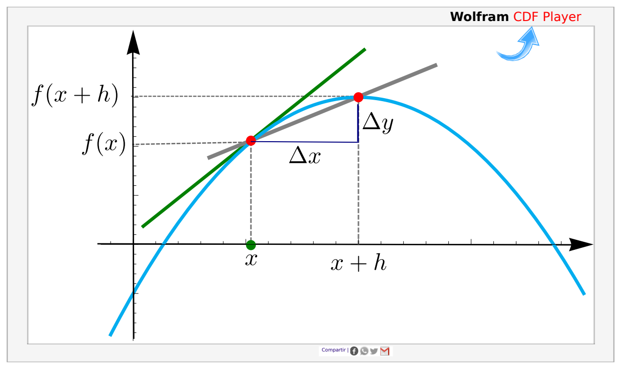
Contenido

4.8 Derivada Direccional I

La derivada de una función de una variable mide la tasa (instántanea) de cambio de la variable dependiente respecto a la variable independiente. La derivada de la función $y = f(x)$ en x es,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista. Geométricamente, la derivada de f en x es la pendiente de la recta tangente a f en el punto $(x,\ f(x)\,)$



Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la derivada de f en $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, en la dirección de un vector unitario $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, mide la tasa (instántanea) de cambio de f a través de la recta $L(h) = \boldsymbol{x} + h\,\boldsymbol{v}$ cuando $h = 0$. El cambio en $\boldsymbol{x}$, en la recta L, es $||\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0 - h\,\boldsymbol{v}|| = ||h\,\boldsymbol{v}|| = h$ (pues $\boldsymbol{v}$ es unitario). De nuevo, esta derivada en la dirección de $\boldsymbol{v}$ se obtiene como un límite,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + h\,\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Observe que este límite es un límite de una función de una variable h, es decir, este límite es el tipo de límites que calculamos en cálculo en una variable.

Sea S la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ y $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in S$. Sea C la curva de intersección de la superficie S con el plano generado por la recta L (tal y como se muestra en la figura 4.1). Geométricamente, la derivada (direccional) de f en P (en la dirección de $\boldsymbol{v}$) es la pendiente de la recta tangente a la *curva* C en P.

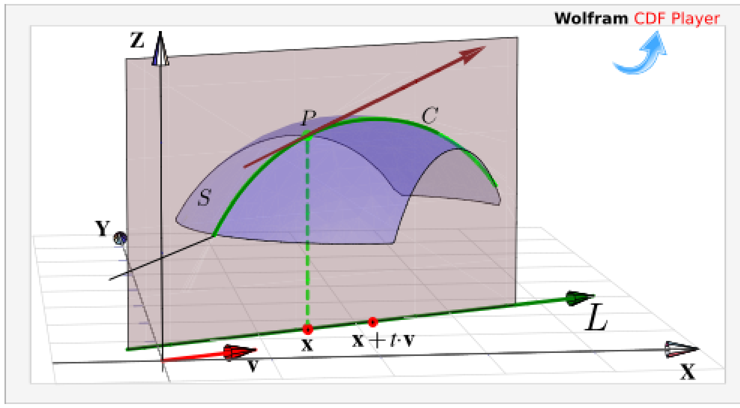


Figura 4.1: Derivada direccional en $\boldsymbol{x}$ la dirección de $\boldsymbol{v}$

De particular interés son la derivada en la dirección del eje X, denotada $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, y la derivada en la dirección del eje Y, denotada $\dfrac{\partial f}{\partial y}$; llamadas *derivadas parciales* respecto a x e y respectivamente.

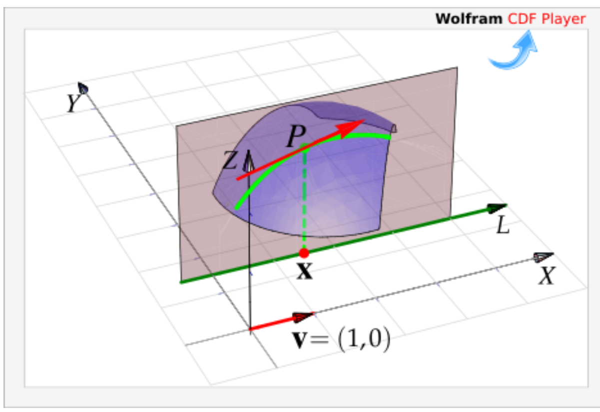


Figura 4.2: Derivada parcial en $\boldsymbol{x}$ en la dirección de X

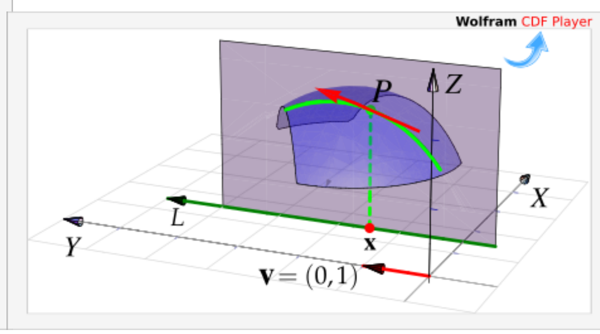


Figura 4.3: Derivada parcial en $\boldsymbol{x}$ en la dirección de Y

4.9 Derivadas parciales.

Definición 4.1 (Derivadas parciales).

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces la *derivada parcial* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ de f respecto a la variable x_i en el punto $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$, se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + he_i) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$

siempre y cuando este límite exista. Aquí $e_i = (0, ..., 1, ...0)$ con un 1 en la i–ésima posición. El dominio de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ en el que este límite existe.

Caso de dos variables

Cuando $z = f(x,y)$, es común denotar las derivadas parciales con $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z_x o f_x. Según la definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Es decir, para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ derivamos de manera ordinaria f respecto a x pensando en y como una constante y para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ derivamos de manera oridinaria f respecto a y pensando en x como una constante. Esto es válido siempre y cuando apliquen los teoremas de derivadas en una variable.

En tres o más variables, la situación es similar: Derivamos respecto a la variable de turno, pensado en las otras variables como "constantes".

Notación. Se usan distintas notaciones para las derivadas parciales. Por ejemplo, para hablar de la derivada parcial de f respecto a x, se usan la notaciones $\dfrac{df}{dx}$, f_x, $\partial_x f$, etc.

La notación para evaluar una derivada parcial en un punto también puede tener variaciones. Por ejemplo, para evaluar una derivada parcial de f (respecto a x) en P se usa $f_x(P)$ o también $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_P$

Ejemplo 4.1

Recordemos que en una variable, si k es una constante, $\begin{cases} \dfrac{d}{du}(k\cdot f(u)) = k\cdot \dfrac{df}{du} \\ \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{k}{f(u)}\right) = \dfrac{-k\cdot \dfrac{df}{du}}{f^2(u)} \end{cases}$

a.) Si $z = x^2y^2+y$, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución:

- $z = x^2y^2+y \Longrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{d}{dx}(x^2)y^2 + \dfrac{d}{dx}(y) = 2xy^2+0$
- $z = x^2y^2+y \Longrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2\dfrac{d}{dy}(y^2) + \dfrac{d}{dy}(y) = x^2 2y+1$

b.) Si $z = \dfrac{x^3}{y^5}$, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución:

- $z = \dfrac{x^3}{y^5} \implies \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{y^5}\cdot x^3\right) = \dfrac{1}{y^5}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(x^3\right) = \dfrac{1}{y^5}\cdot 3x^2$

- $z = \dfrac{x^3}{y^5} \implies \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^3}{y^5}\right) = \dfrac{-x^3\cdot\dfrac{d}{dy}\left(y^5\right)}{y^{10}} = \dfrac{-x^3\cdot 5y^4}{y^{10}}$

Ejemplo 4.2

Recordemos que,
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(f(u)) = \dfrac{df}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}, \text{ en particular } \dfrac{d}{dx}(f^n(u)) = nf^{n-1}(u)\cdot\dfrac{df}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} \\ \dfrac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \dfrac{df}{dx}\cdot g(x) + f(x)\cdot\dfrac{dg}{dx} \\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\dfrac{df}{dx}\cdot g(x) - f(x)\cdot\dfrac{dg}{dx}}{g^2(x)} \end{cases}$$

Si $w = \dfrac{y + z^2\cos^4(zx^3)}{1+y^2}$, calcule $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial z}$

Solución:

- $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{1}{1+y^2}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}\left(y + z^2\cos^4(zx^3)\right) = \dfrac{0 + 4z^2\cos^3(zx^3)\cdot -\operatorname{sen}(zx^3)\cdot 3x^2z}{1+y^2}$

- $$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y + z^2\cos^4(zx^3)\right)\cdot(1+y^2) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(1+y^2\right)\cdot\left(y + z^2\cos^4(zx^3)\right)}{(1+y^2)^2} \\ &= \frac{1\cdot(1+y^2) - 2y\cdot\left(y+z^2\cos^4(zx^3)\right)}{(1+y^2)^2}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(y + z^2\cos^4(zx^3)\right) \\ &= \frac{0 + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(z^2\right)\cdot\cos^4(zx^3) + z^2\cdot\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\cos^4(zx^3)\right)}{1+y^2} \\ &= \frac{2z\cdot\cos^4(zx^3) + z^2\cdot 4\cos^3(zx^3)\cdot -\operatorname{sen}(zx^3)\cdot 1\cdot x^3}{1+y^2}\end{aligned}$$

Ejemplo 4.3 (Evaluando derivadas)

El volumen de un cono es $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$, calcule $\left.\dfrac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=2,\ h=4}$ y $\left.\dfrac{\partial V}{\partial h}\right|_{r=2,\ h=4}$

Solución:

- $\left.\dfrac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=2,\ h=4} = \left.\dfrac{2\pi r h}{3}\right|_{r=2,\ h=4} = \dfrac{16\pi}{3}$
- $\left.\dfrac{\partial V}{\partial h}\right|_{r=2,\ h=4} = \left.\dfrac{\pi r^2}{3}\right|_{r=2,\ h=4} = \dfrac{4\pi}{3}$

Ejemplo 4.4

Verifique que si $z = \arctan(y/x)$, entonces $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Solución:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{\cancel{x^2}}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{-y}{\cancel{x^2}} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{\cancel{x^2}}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{1}{\cancel{x}} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\therefore\quad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{-y}{x^2+y^2} + y\frac{x}{x^2+y^2} = 0$$

Ejemplo 4.5

Si $w = z^2\ln(x^2)\cos(y^2)$, determine $g(z)$ tal que $x\ln(x^2)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(z)\dfrac{\partial w}{\partial z} = 4w$

Solución:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = z^2\cos(y^2)\cdot\dfrac{d}{dx}\left(\ln(x^2)\right) = z^2\cos(y^2)\cdot\dfrac{2}{x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{d}{dz}\left(z^2\right)\ln(x^2)\cos(y^2) = 2z\ln(x^2)\cos(y^2) \end{cases}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} x\ln(x^2)\frac{\partial w}{\partial x} + g(z)\frac{\partial w}{\partial z} &= \cancel{x}\ln(x^2)\, z^2\cos(y^2)\cdot\frac{2}{\cancel{x}} + g(z)\cdot 2z\ln(x^2)\cos(y^2) \\ &= 2z^2\ln(x^2)\cos(y^2) + g(z)\cdot 2z\ln(x^2)\cos(y^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $g(z) = z$ tendríamos lo que se pide:

$$x\ln(x^2)\frac{\partial w}{\partial x}+z\frac{\partial w}{\partial z} = 2z^2\ln(x^2)\cos(y^2)+z\cdot 2z\,\ln(x^2)\cos(y^2) = 4z^2\ln(x^2)\cos(y^2) = 4w \checkmark$$

Ejemplo 4.6

Si $f(t,\theta)=e^{2\theta}\phi(t,\theta)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$

Solución: : En este caso, como ϕ no es conocida, sus derivadas parciales solo se dejan indicadas.

- $\dfrac{\partial f}{\partial t} = e^{2\theta}\dfrac{\partial \phi}{\partial t}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial \theta} = \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(e^{2\theta}\right)\cdot\phi(t,\theta)+e^{2\theta}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta} = 2e^{2\theta}\cdot\phi(t,\theta)+e^{2\theta}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta}$

Ejemplo 4.7

Sean $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones derivables y $u=x^5+y^3$. Si $z=x^2g(u)+f^4(u)$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución: : Como f y g no son conocidas, sus derivadas solo se dejan indicadas.

- $$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2x\cdot g(u)+x^2\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dx} + 4f^3(u)\cdot\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= 2x\cdot g(u)+x^2\frac{dg}{du}\cdot 5x^4 + 4f^3(u)\cdot\frac{df}{du}\cdot 5x^4\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= x^2\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dy} + 4f^3(u)\cdot\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dy}\\ &= x^2\frac{dg}{du}\cdot 3y^2 + 4f^3(u)\cdot\frac{df}{du}\cdot 3y^2\end{aligned}$$

Ejemplo 4.8

Recordemos que en una variable, si $a>0$ y, f y g son derivables, entonces aplicando regla de la cadena,

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left(a^{g(u)}\right) = a^{g(u)}\cdot\ln a\cdot\dfrac{dg}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}\\[2ex] \dfrac{d}{dx}\left([f(x)]^{\alpha}\right) = \alpha\cdot f(x)^{\alpha-1}\cdot\dfrac{df}{dx}\end{cases}$$

Si $z = (\operatorname{sen} x)^{y^2}$, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución:

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left([\operatorname{sen} x]^{y^2}\right) = y^2 \cdot [\operatorname{sen} x]^{y^2-1} \cdot \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = y^2 \cdot [\operatorname{sen} x]^{y^2-1} \cdot \cos x$

- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left([\operatorname{sen} x]^{y^2}\right) = [\operatorname{sen} x]^{y^2} \cdot \ln(\operatorname{sen} x) \cdot \dfrac{d}{dy}(y^2) = [\operatorname{sen} x]^{y^2} \cdot \ln(\operatorname{sen} x) \cdot 2y$

4.10 Ejercicios

Ⓡ **4.10.1** Sea $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $f_y(2,1)$.

Ⓡ **4.10.2** Sea $f(x,y) = \ln^5(x^y + x^2 + 2^y)$ Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Ⓡ **4.10.3** Sea $z = f\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$ con f derivable. Verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Ⓡ **4.10.4** Sea $z = \sqrt{xy + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)}$. Demuestre que $zx\dfrac{\partial z}{\partial x} + zy\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$.

Ⓡ **4.10.5** Sea $z = f(x^2y + y) \cdot \sqrt{x + y^2}$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

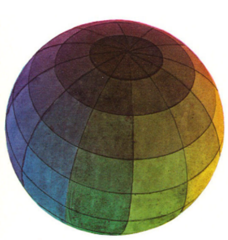
Ⓡ **4.10.6** Sea f una función derivable en todo $\mathbb{R}$ y sea $w(x,y) = f(y \operatorname{sen} x)$ si $u = y \operatorname{sen} x$, verifique que

$$\cos(x)\,\frac{\partial w}{\partial x} + y\operatorname{sen}(x)\,\frac{\partial w}{\partial y} = yf'(u)$$

Ⓡ **4.10.7** Sea $z = g^3(x^2)f(y^2) + \tan x^2$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Ⓡ **4.10.8** La resistencia total R producida por tres conductores con resistencias R_1, R_2 y R_3 conectadas en paralelo en un circuito eléctrico está dado por la fórmula $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$. Calcule $\dfrac{\partial R}{\partial R_1}$. Sugerencia: $R = R(R_1, R_2, R_3)$. Derive a ambos lados respecto a R_1.

Ⓡ **4.10.9** La ley de gases para un gas ideal de masa fija m, temperatura absoluta T, presión P y volumen V es $PV = mRT$ donde R es la constante universal de los gases ideales. Verifique que $\dfrac{\partial P}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial T}\dfrac{\partial T}{\partial P} = -1$.



Revisado: Marzo, 2022
Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF:
https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

http://www.matematicainteractivacr.com/

4.11 Solución de los ejercicios

4.10.1 Usando la regla para la derivada del cociente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\frac{\partial}{\partial y}[xy]\cdot(x^2-y^2)-\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2-y^2\right]\cdot xy}{(x^2-y^2)^2}\\
&= \frac{x\cdot(x^2-y^2)+2y\cdot xy}{(x^2-y^2)^2}\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial}{\partial x}[xy]\cdot(x^2-y^2)-\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2-y^2\right]\cdot xy}{(x^2-y^2)^2}\\
&= \frac{y\cdot(x^2-y^2)-2x\cdot xy}{(x^2-y^2)^2}
\end{aligned}$$

$f_y(2,1)=\dfrac{10}{9}$.

4.10.2 Se debe usar la regla de la cadena para funciones de una variable,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= 5\ln^4(x^y+x^2+2^y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\ln(x^y+x^2+2^y)\right]\\
&= 5\ln^4(x^y+x^2+2^y)\cdot\frac{1}{x^y+x^2+2^y}\cdot(x^y\ln x+2^y\ln 2)\\
&=\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 5\ln^4(x^y+x^2+2^y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\ln(x^y+x^2+2^y)\right]\\
&= 5\ln^4(x^y+x^2+2^y)\cdot\frac{1}{x^y+x^2+2^y}\cdot(y\cdot x^{y-1}+2x)
\end{aligned}$$

4.10.3 Sea $u=\dfrac{x^2}{y}$, entonces $z=f(u)$

- $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\dfrac{2x}{y}$
- $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot\dfrac{-x^2}{y^2}$
- $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\left[\dfrac{2x^2}{y}-\dfrac{2x^2}{y}\right] = 0 \ \surd$

4.10.4

- $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y-\dfrac{y}{x^2+y^2}}{2z}$

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x + \dfrac{x}{x^2+y^2}}{2z}$
- Ahora sustituimos,

$$\begin{aligned} zx\frac{\partial z}{\partial x} + zy\frac{\partial z}{\partial y} &= zx\,\frac{y - \dfrac{y}{x^2+y^2}}{2z} + zy\,\frac{x + \dfrac{x}{x^2+y^2}}{2z} \\ &= \frac{2xy - \dfrac{xy}{x^2+y^2} + \dfrac{xy}{x^2+y^2}}{2} = xy \end{aligned}$$

4.10.5

z es una función de dos variables pero f es una función de un solo argumento y como tal, se deriva de la manera ordinaria. Aquí es conveniente hacer el cambio de variable $u = x^2y + y$ de tal manera que $z = f(u)\cdot\sqrt{x+y^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= f'(u)\cdot\frac{\partial}{\partial y}[u]\cdot\sqrt{x+y^2} + f(u)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{x+y^2}\right] \\ &= f'(u)\cdot(x^2+1)\cdot\sqrt{x+y^2} + f(u)\cdot\frac{y}{\sqrt{x+y^2}} \\ &= \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= f'(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x}[u]\cdot\sqrt{x+y^2} + f(u)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{x+y^2}\right] \\ &= f'(u)\cdot(2xy)\cdot\sqrt{x+y^2} + f(u)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+y^2}} \end{aligned}$$

4.10.6

Sea $u = y\,\text{sen}(x)$, entonces $w = f(u)$.

- $w_x = f'(u)\cdot y\cos(x)$
- $w_y = f'(u)\cdot\text{sen}(x)$
- $\cos(x)w_x + y\,\text{sen}(x)w_y = \cos^2(x)\cdot y\cdot f'(u) + \text{sen}^2(x)\cdot y\cdot f'(u) = \left(\cos^2 x + \text{sen}^2 x\right)\,y\,f'(u) = y\,f'(u)$

4.10.7 $z = g^3(u)f(v) + \tan(x^2)$ con $u = x^2$ y $v = y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3g^2(u)g'(u)\cdot 2x\cdot f(v) + g^3(u)\cdot f'(v)\cdot 0 + ?\frac{2x}{1+x^4}$$

4.10.8 Derivamos a ambos lados respecto a R_1,

$$\frac{\partial}{\partial R_1}\left[\frac{1}{R}\right] = \frac{\partial}{\partial R_1}\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right]$$

$$\frac{-1\cdot\dfrac{\partial R}{\partial R_1}}{R^2} = \frac{-1}{R_1^2} \implies \frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R^2}{R_1^2}.$$

4.10.9

- $\dfrac{\partial P}{\partial V} = -\dfrac{P}{V}$
- $\dfrac{\partial V}{\partial T} = \dfrac{mR}{P}$
- $\dfrac{\partial T}{\partial P} = \dfrac{V}{mR}$
- $\dfrac{\partial P}{\partial V}\,\dfrac{\partial V}{\partial T}\,\dfrac{\partial T}{\partial P} = -\dfrac{P}{V}\,\dfrac{mR}{P}\,\dfrac{V}{mR} = -1.\ \surd$