

Semana 5: Derivadas de orden superior

Derivadas Parciales: Derivadas de orden superior

W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."

<http://www.matematicainteractivacr.com/>



Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita Wolfram CDFPlayer
<https://www.wolfram.com/cdf-player/>



Contenido

5.1	Derivadas parciales de orden superior	1
5.2	Ejercicios	5
5.3	Solución de los ejercicios	8

5.1 Derivadas parciales de orden superior

Si f es una función de dos variables x e y , entonces sus derivadas parciales f_x y f_y también son funciones de dos variables, de modo que podemos considerar sus derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ y $(f_y)_y$, las cuales se llaman segundas derivadas parciales de f .

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$

Si $z = f(x, y)$, se utilizan diferentes notaciones para estas derivadas parciales,

- $(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
- $(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
- $(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
- $(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

La notación f_{xy} o $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ significa que primero derivamos con respecto a x y luego con respecto a y , mientras que para calcular f_{yx} el orden se invierte.

Ejemplo 5.1

Si $f(x, y) = x^3 + x^2y^2 + y^3$, calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Solución: Las primeras derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 3y^2$$

De donde obtenemos que :

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2y^2$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y + 2x^2$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} [3x^2 + 2xy^2] = 4xy$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} [2x^2y + 3y^2] = 4xy$

Ejemplo 5.2

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable y sea $z = f(u)$ con $u = x^3y^4$. Entonces,

- $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \cdot \underbrace{3x^2y^4}$
- $\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \cdot \underbrace{x^3} \underbrace{4y^3}$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u) \cdot 3x^2y^4 \cdot 3x^2y^4 + 6xy^4f'(u)$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) \cdot 4x^3y^3 \cdot 4x^3y^3 + 12x^3y^2f'(u)$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''(u) \cdot 4x^3y^3 \cdot 3x^2y^4 + 12x^2y^3f'(u)$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''(u) \cdot 3x^2y^4 \cdot 4x^3y^3 + 12x^2y^3f'(u)$

Ejemplo 5.3

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se usan para expresar leyes físicas. Por ejemplo, la ecuación diferencial parcial $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, se conoce como ecuación de Laplace, en honor a

Pierre Laplace (1749 - 1827). Las soluciones de esta ecuación se llaman funciones armónicas y desempeñan un papel fundamental en las aplicaciones relacionadas con conducción de calor, flujo

de fluidos y potencial eléctrico.

Compruebe que la función $u(x, y) = e^y \operatorname{sen} x$ satisface la ecuación de Laplace.

Solución: Las primeras derivadas parciales están dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^y \cos x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^y \operatorname{sen} x$$

con lo cual

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^y \operatorname{sen} x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^y \operatorname{sen} x$$

de donde $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^y \operatorname{sen} x + e^y \operatorname{sen} x = 0 \checkmark$

Ejemplo 5.4

La ecuación de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, donde a es una constante, describe el movimiento de una onda, que puede ser una onda de sonido, una onda de luz o una onda que viaja a lo largo de una cuerda vibrante. Si f y g son funciones de una sola variable dos veces derivables, compruebe que la función $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$ satisface la ecuación de onda.

Solución: Primero un cambio de variable. Sea $A = x + at$ y $B = x - at$. De esta manera $u = f(A) + g(B)$. Las derivadas de $u(x, y)$ con respecto a x están dadas por :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(A) + g'(B), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(A) + g''(B)$$

Las derivadas de $u(x, y)$ con respecto a t están dadas por :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = af'(A) - ag'(B), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(A) + a^2 g''(B)$$

Sustituyendo obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(A) + a^2 g''(B) = a^2 [f''(A) + g''(B)] = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \checkmark$$

Ejemplo 5.5

Consideremos f y g funciones de una sola variable dos veces derivables, compruebe que la función $u(x, y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ satisface la ecuación diferencial parcial $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

Solución: Primero un cambio de variable. Sea $A = x + y$, entonces $u = xf(A) + yg(A)$. Las derivadas de $u(x, y)$ con respecto a x están dadas por

$$u_x = f(A) + xf'(A) + yg'(A)$$

$$u_{xx} = f'(A) + f'(A) + xf''(A) + yg''(A) = 2f'(A) + xf''(A) + yg''(A)$$

$$u_{xy} = f'(A) + xf''(A) + g'(A) + yg''(A)$$

$$u_y = xf'(A) + g(A) + yg'(A)$$

$$u_{yy} = xf''(A) + g'(A) + g'(A) + yg''(A) = xf''(A) + 2g'(A) + yg''(A)$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} &= 2f'(A) + xf''(x+y) + yg''(A) - 2f'(A) - 2xf''(A) - 2g'(A) \\ &\quad - 2yg''(A) + xf''(A) + 2g'(A) + yg''(A) = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ejemplo 5.6

Compruebe que la función $u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ satisface la ecuación diferencial de Laplace en

derivadas parciales $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Solución: Calculemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y^2} = -\frac{-x^2 + 2y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z^2} = -\frac{-x^2 - y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

y al sumarlas obtenemos el resultado deseado.

Observación: Note que las *derivadas parciales mixtas* f_{xy} y f_{yx} en el ejemplo anterior son iguales. El siguiente teorema, da las condiciones bajo las cuales podemos afirmar que estas derivadas son iguales. El teorema es conocido de Clairaut o también como Teorema de Schwarz.

Teorema 5.1 (Teorema de Clairaut o Teorema de Schwarz).

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar donde D es un disco abierto con centro en (a, b) y radio δ , si las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D , entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

5.2 Ejercicios

- (R) 5.2.1** Sea k una constante y $C(x, t) = t^{-1/2} e^{-x^2/kt}$. Verifique que esta función satisface la ecuación (de difusión)

$$\frac{k}{4} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

- (R) 5.2.2** Verifique que $u(x, y) = e^y \sin x$ satisface la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

- (R) 5.2.3** Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante. Verifique que $u(x, t) = \sin(x - at) + \ln(x + at)$ es solución de la ecuación de onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

- (R) 5.2.4** Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante y f y g funciones dos veces derivables. Verifique que $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$ es solución de la ecuación de onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

- (R) 5.2.5** Verifique que $z = \ln(e^x + e^y)$ es solución de las ecuación diferencial $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ y de la ecuación diferencial $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$.

- (R) 5.2.6** Sea $g(x, y) = x^2 \sin(3x - 2y)$. Verifique la identidad

$$x \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 2 \frac{\partial g}{\partial y} + 6x \cdot g(x, y).$$

- (R) 5.2.7** La energía cinética de un cuerpo de masa m y velocidad v es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Verifique que $\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$.

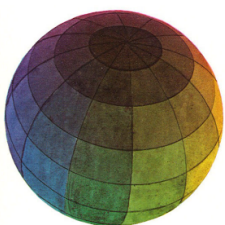
- (R) 5.2.8** Sea f y g funciones dos veces derivables. Sea $u = x^2 + y^2$ y $w(x, y) = f(u) \cdot g(y)$. Calcule $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$.

- (R) 5.2.9** Sea f y g funciones dos veces derivables. Sea $w(x, y) = f(u) + g(v)$ donde $u = \frac{x}{y}$ y $v = \frac{y}{x}$. Calcule $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$.

Ⓡ **5.2.10** Sea $w = e^{3x} \cdot f(x^2 - 4y^2)$, donde f es una función dos veces diferenciable. Calcule $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

Ⓡ **5.2.11** Sea $u(r, \theta) = r^n \cos(n\theta)$ con $n \in \mathbb{N}$ una constante. Verifique que u satisface la ecuación

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0$$




Revisado: Marzo, 2022

Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF:

https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

<http://www.matematicainteractivacr.com/>

5.3 Solución de los ejercicios

5.2.1   Pongamos $C(x, t) = \frac{e^{-x^2/kt}}{\sqrt{t}}$.



- $\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\left(\sqrt{t} \frac{-2x}{kt} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) e^{-x^2/kt}}{t} = e^{-x^2/kt} \left(\frac{x^2}{kt^{5/2}} - \frac{1}{2t^{3/2}}\right)$
- $\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{-2x}{kt} e^{-x^2/kt}$
- $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = e^{-x^2/kt} \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{4x^2}{k^2 t^2} - \frac{2}{kt}\right) = e^{-x^2/kt} \left(\frac{4x^2}{k^2 t^{5/2}} - \frac{2}{kt^{3/2}}\right)$
- Luego, multiplicando $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ por $\frac{k}{4}$ se obtiene la identidad.

5.2.2  

- $u_x = e^y \cos x$
- $u_y = e^y \sen x$
- $u_{xx} = -e^y \sen x$
- $u_{yy} = e^y \sen x$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^y \sen x + e^y \sen x = 0 \quad \checkmark$

5.2.3  

- $u_t = -a \cos(x - at) + \frac{a}{x + at}$
- $u_{tt} = -a^2 \sen(x - at) - \frac{a^2}{(x + at)^2}$
- $u_x = \cos(x - at) + \frac{1}{x + at}$
- $u_{xx} = -\sen(x - at) - \frac{1}{(x + at)^2}$
- $u_{tt} = -a^2 \sen(x - at) - \frac{a^2}{(x + at)^2} = a^2 \cdot \left(-\sen(x - at) - \frac{1}{(x + at)^2}\right) = a^2 \cdot u_{xx} \quad \checkmark$

5.2.4   Sea $A = x - at$ y $B = x + at$, entonces $u(x, t) = f(A) + f(B)$.

- $u_t = -af'(A) + ag'(B)$

- $u_{tt} = a^2 f''(A) + a^2 g''(B)$
- $u_x = f'(A) + g'(B)$
- $u_{xx} = f''(A) + g''(B)$
- $u_{tt} = a^2 f''(A) + a^2 g''(B) = a^2 \cdot u_{xx}$. \checkmark

5.2.5   Satisfice $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.



- $z_x = \frac{e^x}{e^x + e^y}$
- $z_y = \frac{e^y}{e^x + e^y}$
- $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} = 1$ \checkmark

Satisfice $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$.

- $z_{xx} = \frac{e^x \cdot (e^x + e^y) - e^x \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2}$
- $z_{yy} = \frac{e^y \cdot (e^x + e^y) - e^y \cdot e^y}{(e^x + e^y)^2}$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e^y}{e^x + e^y} \right] = \frac{-e^y \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2}$
- $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = \frac{e^x \cdot (e^x + e^y) - e^x \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2} \cdot \frac{e^y \cdot (e^x + e^y) - e^y \cdot e^y}{(e^x + e^y)^2} - \left(\frac{-e^y \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2} \right)^2$
 $= \frac{e^x \cdot e^y}{(e^x + e^y)^2} \cdot \frac{e^y \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2} - \left(\frac{-e^y \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2} \right)^2 = 0$ \checkmark

5.2.6  

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \sin(3x - 2y) + 3x^2 \cos(3x - 2y)$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -2x^2 \cos(3x - 2y)$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = -4x \cos(3x - 2y) - 6x^2 \sin(3x - 2y)$. La identidad se verifica de manera directa.

5.2.7   $\frac{\partial K}{\partial m} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = \frac{1}{2} v^2 \cdot m = K$. \checkmark

5.2.8  

- $\frac{\partial w}{\partial x} = f'(u) \cdot 2x \cdot g(y)$
- $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2g(y) \cdot [f''(u) \cdot 2x^2 + f'(u)]$
- $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 2x[f''(u) \cdot 2y \cdot g(y) + g'(y) \cdot f'(u)]$

- $\frac{\partial w}{\partial y} = f'(u) \cdot 2y \cdot g(y) + g'(y) \cdot f(u)$

5.2.9  



- $\frac{\partial w}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{1}{y} + g'(v) \cdot \frac{-y}{x^2}$

- $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = f''(u) \cdot \frac{-x}{y^2} \cdot \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \cdot f'(u) + g''(v) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{-y}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot g'(v).$

5.2.10   Sea $u = x^2 - 4y^2$,

- $\frac{\partial w}{\partial y} = -e^{3x} f'(u) \cdot 8y$

- $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 8y [-3e^{3x} f'(u) - e^{3x} f''(u) \cdot 2x]$

5.2.11   $u_{rr} = n(n-1)r^{n-2} \cos(n\theta)$ y $u_{\theta\theta} = -n^2 r^n \cos(n\theta)$. Sustituyendo y simplificando se verifica la ecuación.