Instituto Tecnológico de Costa Rica
TEC| ESCUELA DE MATEMÁTICA CÁLCULO SUPERIOR

Semana 5: Regla de la Cadena

Derivadas Parciales: Regla de la Cadena

W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."
http://www.matematicainteractivacr.com/

Contenido

5.3 Función diferenciable. Diferencial total.

Diferencial en una variable. Geométricamente, si f es derivable en x_0 entonces la ecuación de la recta tangente T a f en $(x_0, f(x_0))$ es

$$T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

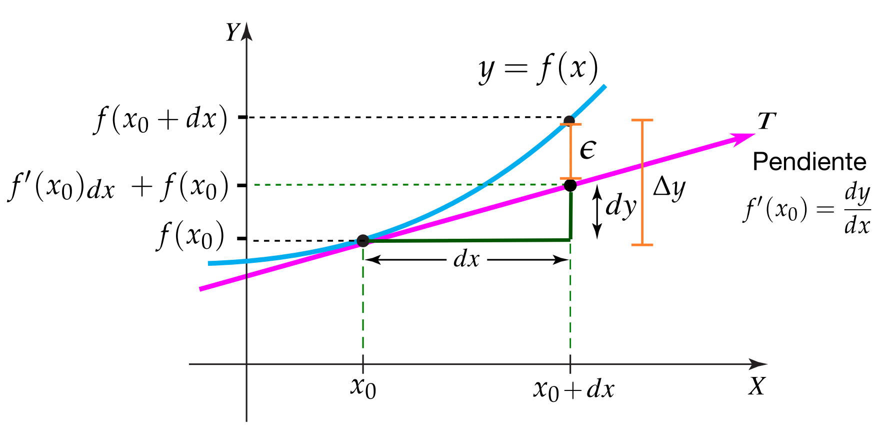
Entonces

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) \approx T(x_0 + \Delta x) = f'(x_0)\Delta x + f(x_0) \quad &\Longrightarrow \quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \\ &\Longrightarrow \quad \Delta y \approx f'(x_0)\Delta x \end{aligned}$$

El diferencial dx puede ser cualquier número (grande o pequeño), si dx es pequeño, Δy se puede aproximar con el diferencial $dy = f'(x_0)\,dx.$ Formalmente,

$$\Delta y = f'(x)dx + \epsilon \quad \text{con} \quad \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\epsilon}{\Delta x} = 0$$

Esto dice que f es *diferenciable* en x_0 si la distancia ϵ entre el gráfico de f y su tangente se desvanece más rápidamente que el desplazamiento horizontal hacia el punto de tangencia.



Diferencial total en dos variables. Sea S una superficie de ecuación $z = f(x,y)$. El cambio en f en dos variables es

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x,\ \ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Sea $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ y supongamos que existe el plano tangente Π a S en P. Más adelante vamos a ver que si las derivadas parciales existen y son continuas en P, dos vectores tangentes son $(1, 0, f_x(x_0, y_0))$ y $(0, 1, f_y(x_0, y_0))$ que están en el plano tanegnte a S en P. Con estos vectores tangentes obtenenos una ecuación vectorial del plano tangente Π (si hubiera) en $P \in S$. Esta ecuación vectorial es

$$\Pi_T:\ P\ +\ t\cdot(1,0,f_x(x_0,y_0)) + s\cdot(0,1,f_y(x_0,y_0)),\ \ t,s\ \in\ \mathbb{R}$$

Si tomamos $t = dx$ y $s = dy$, y si $Q = (x_0, y_0, z_2) \in \Pi$, la coordenada z de Q es

$$z_2 = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0))\,dy$$

Entonces $f(x_0 + dx,\ y_0 + dy) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy$

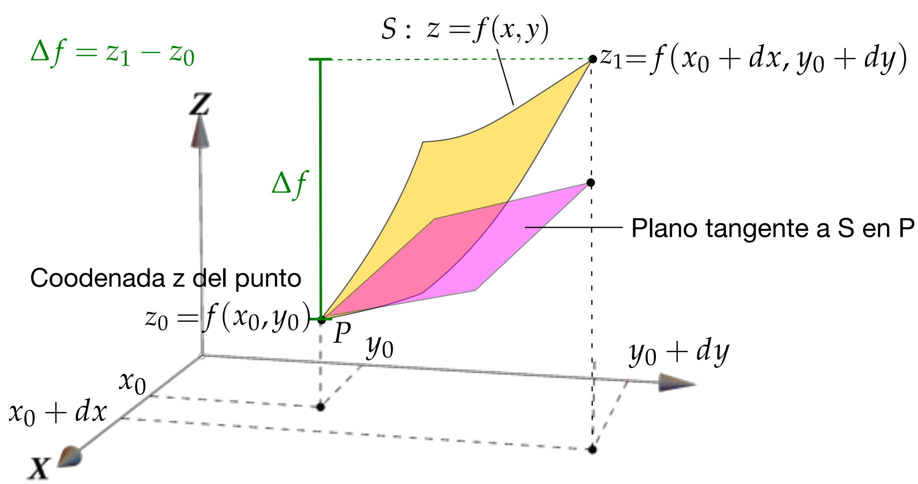


Figura 5.1: $\Delta f = z_1 - z_2$

Tenemos $\Delta f = f(x_0 + dx,\ y_0 + dy) - f(x_0,y_0) \approx f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy$, es decir,

$$\Delta f \approx f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy$$

El *diferencial total* de f es $df = f_x\,dx + f_y\,dy$.

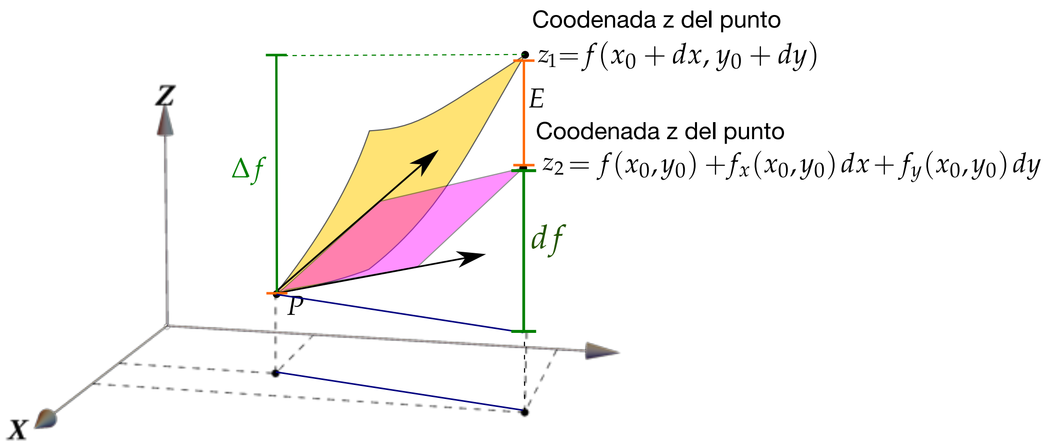


Figura 5.2: $\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)$

(Función diferenciable)

Si la *derivada* $Df(\mathbf{a})$ de f en $\mathbf{a}$ existe, decimos que f es "localmente lineal" o "diferenciable" en $\mathbf{a}$ si $f(\mathbf{a}+\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})$ y $Df(\mathbf{a})\,\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ son indistinguibles en el sentido de que su diferencia se desvanece más rápido que $||\Delta\mathbf{x}||$.

Geométricamente, en particular la función f es *diferenciable* en $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$ si la distancia entre la superficie y el plano

$$E = f(x_0 + \Delta x,\ \ y_0 + \Delta y)\ -\ [f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)]$$

se desvanece más rápidamente que el desplazamiento horizontal $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ||(x, y) - (x_0, y_0)||$ hacia el punto de tangencia.

Definición 5.1 (Función diferenciable)

Una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es *diferenciable* en (x_0, y_0) si existe un entorno alrededor de (x_0, y_0) en el que

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy + E(x, y) \quad \text{con} \quad \lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} \frac{E(x, y)}{||(x, y) - (x_0, y_0)||} = 0$$

Es decir, si f es diferenciable en (x_0, y_0), entonces en la cercanías de (x_0, y_0) la función f se puede aproximar usando el plano tangente. Si $z = f(x, y)$ es diferenciable, el diferencial total $df = f_x(P)\,dx + f_y(P)\,dy$ representa el incremento de f a lo largo del plano tangente a f en el punto (x, y). Sería como calcular con el plano tangente en vez de usar la superficie S (ver figura 5.2).

Tenemos un teorema para caracterizar las funciones diferenciables.

Teorema 5.1 (Función diferenciable)

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si las derivadas parciales de f existen y son continuas en un entorno de $(x_0, y_0) \in U$, entonces f es *diferenciable* en (x_0, y_0).

5.4 Regla de la cadena.

Recordemos que en una variable, si $f(u)$ y $u(x)$ son derivables, entonces la regla de la cadena establece

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

La regla de la cadena nos indica como varía f conforme recorremos la trayectoria $u(x)$. Formalmente es la derivada de f en presencia de un cambio de variable u. En funciones de varias variables la relación persiste en el siguiente sentido

Ya conocemos que si f es *diferenciable* en (x_0, y_0) entonces hay entorno alrededor de (x_0, y_0) en el que

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy + E(x, y) \quad \text{con} \quad \lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} \frac{E(x, y)}{||(x, y) - (x_0, y_0)||} = 0$$

En presencia de una composición de funciones (o mejor, "un cambio de variable"), tenemos

Teorema 5.2 (Regla de la cadena – Caso I).

Sean $x = x(t)$ y $y = y(t)$ derivables y $z = f(x, y)$ diferenciable en $(x, y) = (x(t), y(t))$, entonces si $z = f(x(t), y(t))$ es derivable,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t)$$

Teorema 5.3 (Regla de la cadena – Caso II.)

Sean $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ con derivadas parciales en (x, y). Si $z = f(u, v)$ es diferenciable en $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ entonces $z = f(u, v)$ tiene derivadas parciales de primer orden en (x, y) y

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.1

Sea $z(x, y) = \sqrt{\arctan(y/x) + \tan(xy)}$. Podemos hacer un cambio de variable y calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ usando la regla de la cadena. Sea $u(x,y) = \arctan(y/x)$ y $v(x,y) = \tan(xy)$, entonces $z = \sqrt{u+v}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{u+v}}\,\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{-y\cdot 1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{u+v}}\,y\sec^2(xy)\end{aligned}$$

Al sustituir u y v obtenemos el resultado completo, si fuera necesario.

Ejemplo 5.2

Sea $z(x,y) = x^2 + 3y^2$, donde $x = e^t$ y $y = \cos(t)$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= 2xe^t - 6y\,\text{sen}(t) \;=\; 2e^{2t} - 6\cos(t)\,\text{sen}(t)\end{aligned}$$

Ejemplo 5.3

Sea $z(u,v) = x^2e^{y^3}$, donde $x = uv$ y $y = u^2 - v^3$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= 2xe^{y^3}\frac{\partial x}{\partial u} + 3x^2y^2e^{y^3}\frac{\partial y}{\partial u} \;=\; 2xe^{y^3}v + 3x^2y^2e^{y^3}2u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\\ &= 2xe^{y^3}\frac{\partial x}{\partial v} + 3x^2y^2e^{y^3}\frac{\partial y}{\partial v} \;=\; 2xe^{y^3}u + 3x^2y^2e^{y^3}\cdot -3v^2\end{aligned}$$

Ejemplo 5.4

Sea f una función diferenciable y $z(x,y) = f(x^2, xy^2)$. Para derivar usando la regla de la cadena usamos el cambio de variable $u = x^2$ y $v = xy^2$, entonces $z(x,y) = f(u,v)$ y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\
&= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y^2\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 0+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2xy
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.5

Sea f una función derivable y $z = f(x,y)$ con $x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{sen}\,\theta\\
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot -r\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\,r\cos\theta
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.6

Sea $V = V(P,T)$. Si $P(V-b)e^{RV} = RT$, con b, R constantes, calcule $\dfrac{\partial V}{\partial T}$.

Solución: V es función de P y T. Derivamos a ambos lados respecto a T,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial T}\left[P(V-b)e^{RV}\right] &= \frac{\partial}{\partial T}[RT]\\
P\left[V_T e^{RV}+(V-b)e^{RV}RV_T\right] &= R\\
\therefore\ V_T &= \frac{R}{Pe^{RV}(1+(V-b)R)}.
\end{aligned}$$

Regla de la cadena y segundas derivadas parciales. Si $z = f(u,v)$ tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces las derivadas parciales de f siguen siendo funciones de u y v.

Si $z = f(u,v)$, entonces $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$

Esquematicamente se podría ver así:

images/cap3_derivadasparciales/RC1fx.pdf

images/cap3_derivadasparciales/RC2fx.pdf images/cap3_derivadasparciales/RC2fyv.pdf

Ejemplo 5.7

Si $z = g(x^2) + f(\arctan x,\ \tan y)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Solución: : Primero un cambio de variable $z = g(u) + f(v, w)$ con $\left\{\begin{array}{lcl} u & = & x^2 \\ v & = & \arctan x \\ w & = & \tan y \end{array}\right.$

a.) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = g'(u) \cdot 2x + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot 0$

b.)
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2x \cdot g'(u) + \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(v,w)\right) \\ &= 2\,g'(u) + 2xg''(u) \cdot 2x - \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} \cdot 0\right) \end{aligned}$$

c.) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 + \dfrac{\partial f}{\partial v} \cdot 0 + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot \sec^2 y$

d.)
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sec^2 y \cdot \frac{\partial f}{\partial w}(v,w)\right) \\ &= \sec^2 y \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} \cdot 0\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.8

Si $z(x,y) = g(y) \cdot f(x-2y,\ y^3)$. Calcule z_x y z_{xy}.

Solución: Cambio de variable: Sea $u = x - 2y,\ \ v = y^3.$ Entonces $z(x,y) = g(y)\, f(u,v)$.

$z_x = g(y)\ [f_u \cdot 1 + f_v \cdot 0] = g(y)\, f_u(u,v)$

$z_{xy} = g'(y) \cdot 1 \cdot f_u + g(y)\left[-2\, f_{uu} + 3y^2 f_{uv}\right]$

Ejemplo 5.9

Cambio de variable: Sea $z(x,y) = g(u,v)$ con $u = x^2y^2$ y $v = xy$. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Solución:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot 2xy^2 + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot y$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial g(u,v)}{\partial u}\right]\cdot 2xy^2 + \frac{\partial}{\partial y}\left[2xy^2\right]\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g(u,v)}{\partial v} + y\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial g(u,v)}{\partial v}\right]\\
&= \left[\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\cdot u_y + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\cdot v_y\right]\cdot 2xy^2 + 4xy\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g(u,v)}{\partial v} + y\cdot\left[\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\cdot u_y + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot v_y\right]\\
&= \left[\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\cdot 2yx^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\cdot x\right]\cdot 2xy^2 + 4xy\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g(u,v)}{\partial v} + y\cdot\left[\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\cdot 2yx^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot x\right]
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.10

Sea $F(u,v) = -u - v$ con $u^2 = x - y$ y $v^2 = x + y$. Si $u \neq 0$ y $v \neq 0$, verifique

a.) $F_x = -\dfrac{u+v}{2uv}$.

b.) $F_y = \dfrac{v-u}{2uv}$.

Solución: Primero veamos que $2u\,u_x = 1$, $2v\,v_x = 1$, $2u\,u_y = -1$ y $2v\,v_y = 1$. Por lo tanto

a.) $F_x = F_u\,u_x + F_v\,v_x = -1\cdot\dfrac{1}{2u} - 1\cdot\dfrac{1}{2v} = -\dfrac{u+v}{2uv}$.

b.) $F_y = F_u\,u_y + F_v\,v_y = -1\cdot\left(-\dfrac{1}{2u}\right) - 1\cdot\dfrac{1}{2v} = \dfrac{v-u}{2uv}$.

5.5 Ejercicios

Ⓡ **5.5.1** Sea $z = xy^2 + x$ con $x = \operatorname{sen} t$ y $y = \tan(t)$. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$.

Ⓡ **5.5.2** Sea $w = x^2 + 2xy + y^2$ con $x = t\cos t$ y $y = t \operatorname{sen} t$. Calcule $\dfrac{dw}{dt}$.

Ⓡ **5.5.3** Sea $z = u\sqrt{u + v^2}$ con $u = xy$ y $v = \arctan(y/x)$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Ⓡ **5.5.4** Sea $z = g(y) \cdot f(x, y)$ con f y g funciones con derivadas de segundo orden.

a.) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

b.) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

c.) Si $x = t^2$ y $y = u^2 + t^3$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial u}$

Ⓡ **5.5.5** Sea $z = f(xy, x)$. Si f tiene derivadas parciales de segundo orden, calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Ⓡ **5.5.6** Sea $z = \ln^3(xy) + f(xy, x)$. Si f tiene derivadas parciales de segundo orden, calcular $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Ⓡ **5.5.7** Sea g derivable y f una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Determine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ si $z = f\big(x \operatorname{sen}(y),\ g(x)\big)$

Ⓡ **5.5.8** Sea $T(x, t) = e^{-3x} \operatorname{sen}(2t - 3x)$. Determine una constante K tal que

$$6\,\frac{\partial T}{\partial t} + 3\,\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} - 2\,\frac{\partial T}{\partial x} \;=\; K \cdot T(x, t)$$

Ⓡ **5.5.9** Sea z definida mediante $z = xf(y) + yg(x)$, con f y g funciones dos veces derivables. Calcule $K \in \mathbb{R}$ de tal manera que se verifique la identidad

$$2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - Kx\frac{\partial z}{\partial x} - Ky\frac{\partial z}{\partial y} + 2z = 0.$$

Ⓡ **5.5.10** Sea $z = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$, donde $f = f(x, y)$ es una función con derivadas de segundo orden. Si $x = u^2 + v$ y $y = u + v^2$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$. Sugerencia: $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$

Ⓡ **5.5.11** Sea $w = g(x) + f(x, y)$ con $x = r\cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen}\theta$. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$

Ⓡ **5.5.12** Sea $z = f(u, v)$, donde $u = x^2 + y^2$, $v = xy$. Si f tiene derivadas parciales de segundo orden f_u, f_{uv}, f_{uu} y f_{vv} continuas (es decir, $f_{uv} = f_{vu}$). Verifique que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{\partial f}{\partial u} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Ⓡ **5.5.13** Sea $z = f(x^2 + \cos y,\ x^2 - 1) - g(3xy^2)$ con g derivable y f con derivadas parciales continuas y de segundo orden. Calcule z_{xy}

Ⓡ **5.5.14** Sea $z = x^2 f^4(xy, y^2)$ con f con derivadas parciales continuas. Calcule z_y y z_x

Ⓡ **5.5.15** Considere $z = x \cdot f\left(\frac{y}{x},\ e^{3x} + 3x\right) + h\left(x^2y^2\right)$, donde f es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas y h una función con derivadas de segundo orden continuas, calcule: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Ⓡ **5.5.16** Considere $z = f(2x^2y - y,\ x^2) + g(x^2 - xy)$, donde f es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas y g una función con derivadas de segundo orden continuas, calcule: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Ⓡ **5.5.17** Sea $z = f(x^2 - y,\ xy)$ donde $s = x^2 - y$ y $t = xy$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ (Sugerencia: Calcule z_x y z_y y resuelva el sistema pensando en $\frac{\partial f}{\partial t}$ y $\frac{\partial f}{\partial s}$ como incognitas).

Ⓡ **5.5.18** Verifique que si f es diferenciable, la función $z = f(xy)$ satisface la ecuación $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

Ⓡ **5.5.19** Sea $u = f(r)$ con f derivable y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Mostrar que

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = rf'(r)$$

Sugerencia: $\frac{\partial}{\partial x}\left(r^2\right) = 2r \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$

Ⓡ **5.5.20** Supongamos que f es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ si $z(x, y) = \dfrac{f(u, v)}{x}$ con $u = x^3$ y $v = 3y - 2$

Ⓡ **5.5.21** (*) Supongamos que se sabe que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 \operatorname{sen}(xy)$ con $x > 0$ y $y > 0$. Verifique que aplicando un cambio de variable de (x, y) a (u, v) donde $u = xy$ y $v = x/y$; entonces la ecuación $(*)$ se convierte en la ecuación $\dfrac{\partial z}{\partial u} = v \operatorname{sen} u$. Sugerencia: Como $z = z(u, v)$; calcule las derivadas parciales y luego despeje x y y en el cambio de variable. Al sustituir, obtiene el resultado.

Revisado: Marzo, 2022
Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF:
https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

http://www.matematicainteractivacr.com/

5.6 Solución de los ejercicios

5.5.1

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\\ &= (y^2+1)\cdot\cos t + 2xy\cdot\sec^2 t\end{aligned}$$

5.5.2 $\qquad \dfrac{dw}{dt} = 2t + 2t\,\mathrm{sen}\,2t + 2t^2\cos 2t$

5.5.3

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ &= \left[\sqrt{u+v^2} + \frac{u}{2\sqrt{u+v^2}}\right]\cdot y + \left[\frac{uv}{\sqrt{u+v^2}}\right]\cdot\frac{-y/x^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\ &= \left[\sqrt{u+v^2} + \frac{u}{2\sqrt{u+v^2}}\right]\cdot x + \left[\frac{uv}{\sqrt{u+v^2}}\right]\cdot\frac{1/x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\end{aligned}$$

5.5.4

a.) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = g(y)\cdot\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]$

b.) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = g'(y)\cdot f(x,y) + g(y)\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]$

c.)
$$\frac{\partial z}{\partial t} = g'(y)\cdot 3t^2\cdot f(x,y) + g(y)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 2t + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 3t^2\right]$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = g'(y)\cdot 2u\cdot f(x,y) + g(y)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 2u\right]$$

5.5.5

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot y + \dfrac{\partial f}{\partial v}$

- Aplicamos regla del producto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial v}\right]\\ &= 1\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot x\right]+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot x\right]\end{aligned}$$

5.5.6 R

- $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3\ln^2(xy)\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot y+\dfrac{\partial f}{\partial v}$

- Aplicamos regla del producto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} &= 6\ln(xy)\cdot\frac{1}{xy}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial v}\right]\\ &= 6\ln(xy)\cdot\frac{1}{xy}+1\cdot\frac{\partial f}{\partial u}+y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot x\right]+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot x\right]\end{aligned}$$

5.5.7 R Primero hacemos un cambio de variable: $z=f(U,V)$ con $U=x\,\text{sen}(y)$ $V=g(x)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial U}\cdot U_y+\frac{\partial f}{\partial V}\cdot V_y\\ &= \frac{\partial f}{\partial U}\cdot x\cos y+\frac{\partial f}{\partial V}\cdot 0\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(U,V)}{\partial U}\cdot x\cos y\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial U^2}\cdot U_x+\frac{\partial^2 f}{\partial V\partial U}\cdot V_x\right)x\cos y\;+\;\cos y\,\frac{\partial f}{\partial U}\\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial U^2}\cdot \text{sen}\,y+\frac{\partial^2 f}{\partial V\partial U}\cdot g'(x)\right)x\cos y\;+\;\cos y\,\frac{\partial f}{\partial U}\end{aligned}$$

5.5.8 R $\dfrac{\partial T}{\partial t}=2e^{-3x}\,\text{sen}(2t-3x)$

$\dfrac{\partial^2 T}{\partial x\partial t}=-6e^{-3x}\cos(2t-3x)+6e^{-3x}\,\text{sen}(2t-3x)$

$\dfrac{\partial T}{\partial x}=-3e^{-3x}\,\text{sen}(2t-3x)-3e^{-3x}\cos(2t-3x)$

$K=24.$

5.5.9 R

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f(y) + yg'(x)$ • $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xf'(y) + g(x)$ • $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(y) + g'(x)$

Si $K = 2$, entonces

$$\begin{aligned} & 2xy(f'(y) + g'(x)) - 2x(f(y) + yg'(x)) - 2y(xf'(y) + g(x)) + 2z \\ &= 2xyf'(y) + 2xyg'(x) - 2xf(y) - 2xyg'(x) - 2yxf'(y) - 2yg(x) + 2z \\ &= -2xf(y) - 2yg(x) + 2z \;=\; 0 \checkmark \quad \text{pues } \; 2z = 2xf(y) + 2yg(x) \end{aligned}$$

5.5.10 R

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot 2v + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot 2v \end{aligned}$$

5.5.11 R $\quad \dfrac{\partial w}{\partial \theta} = -g'(x)\cdot r\,\mathrm{sen}\,\theta - \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot r\,\mathrm{sen}\,\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot r\cos\theta$

5.5.12 R

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\dfrac{\partial f}{\partial u} + y\dfrac{\partial f}{\partial v}$

- Aplicamos la regla del producto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[2x\frac{\partial f}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[y\frac{\partial f}{\partial v}\right] \\ &= 2\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\left[2x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\right] + y\left[2x\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right] \end{aligned}$$

- Simplificando se obtiene el resultado.

5.5.13 R Primero debemos hacer un cambio de variable para poder aplicar la regla de la cadena. Sea $z = f(u, v) - g(w)$. Entonces,

$$z_y = f_u \cdot -\operatorname{sen} y \;-\; g(w) \cdot 6xy.$$

$$z_{xy} = -\operatorname{sen} y(f_{uu} \cdot 2x + f_{uv} \cdot 2x) - g''(w) \cdot 3y^2 \cdot 6xy + 6y \cdot g'(w)$$

5.5.14 Ⓡ Primero debemos hacer un cambio de variable para poder aplicar la regla de la cadena. Sea $z = x^2 f^4(u,v)$. Entonces,

$$z_x = 2xf^4(u,v) + x^2(4f^3(u,v) \cdot (f_u \cdot y + f_v \cdot 0))$$

$$z_y = x^2(4f^3(u,v) \cdot (f_u \cdot x + f_v \cdot 2y))$$

5.5.15 Ⓡ

Sea $u = \frac{y}{x}$, $v = e^{3x} + 3x$ y $w = x^2y^2$. Entonces $z = x \cdot f\,(u,v) + h\,(w)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \\
&= x \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \\
&= x \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + h'\,(w) \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\
&= x \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 0 \right) + h'\,(w) \cdot 2x^2y \\
&= \frac{\partial f}{\partial u} + h'\,(w) \cdot 2x^2y
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial x} \\
&= \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial u} + h'\,(w) \cdot 2x^2y \right)}{\partial x} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + h''\,(w)\, \frac{\partial w}{\partial x} \cdot 2x^2y + h'\,(w) \cdot 4xy \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{-y}{x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \left(3e^{3x} + 3\right) + h''\,(w) \cdot 2xy^2 \cdot 2x^2y + h'\,(w) \cdot 4xy \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \frac{-y}{x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \left(3e^{3x} + 3\right) + h''\,(w) \cdot 4x^3y^3 + h'\,(w) \cdot 4xy
\end{aligned}$$

5.5.16 Ⓡ Cambio de variable: $z = f(u,v) + g(w)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot (2x^2 - 1) - x \cdot \frac{dg}{dw}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x\, \frac{\partial f}{\partial u} + (2x^2 - 1) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\, 4xy + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\, 2x \right) - g'(w) - x \cdot g''(w) \cdot (2x - y)$$

5.5.17 Ⓡ Las derivadas parciales que se piden aparecen cuando calculamos $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$. La idea es despejar a partir de estos dos cálculos.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial z}{\partial x} & = & \dfrac{\partial f}{\partial s}\cdot 2x + \dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot y \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} & = & \dfrac{\partial f}{\partial s}\cdot -1 + \dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot x \end{array}\right. \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{1}{y+2x^2}\left[\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]$$

De manera análoga, $\dfrac{\partial f}{\partial s} = \dfrac{1}{y+2x^2}\left[\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]$

5.5.18 Sea $u = xy$. Con un cálculo directo obtenemos $\dfrac{\partial z}{\partial x} = yf(u)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xf'(u)$ Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene el resultado.

5.5.19 Observe que

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(r^2\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right) \Longrightarrow 2r\dfrac{\partial r}{\partial x} = 2x$, es decir, $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$. De manera análoga,

$\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$

$\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r}$

Entonces

$$x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y} + z\,\frac{\partial u}{\partial z} = x\cdot f'(r)\cdot\frac{x}{r} + y\cdot f'(r)\cdot\frac{y}{r} + z\cdot f'(r)\frac{z}{r} \;=\; f'(r)\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{r} = rf'(r)$$

5.5.20

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{3}{x^2}\cdot f_v + 3xf_{vu}$$

5.5.21

Al aplicar el cambio de variable, z es una función de u y v, es decir, $z = z(u,v)$. Por tanto

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}u_x + \frac{\partial z}{\partial v}v_y = y\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial v} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{x}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Sustituyendo $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $x = \sqrt{uv}$ y $y = \sqrt{u/v}$ en $(*)$, nos queda

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v\,\mathrm{sen}\,u$$

Epílogo: Existencia del plano tangente. Una derivada de f.

• **No siempre tenemos un plano tangente.** Si la función es diferenciable en (x_0, y_0) entonces tenemos un plano tangente en este punto y este plano tangente a S en P contiene todas las tangentes a S en P.

Considere la función *continua*,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para esta función tenemos que $f_x(x,0) = f_y(0,y) = 0,$ así que si hubiera un plano tangente, tendría que ser el plano $z = 0.$

Pero si evalúamos f sobre la recta $y = x$ tendríamos

$$f(x,x) = \frac{|x|}{\sqrt{2}}$$

y si $x > 0,$ la pendiente de la tangente sería $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y no 0 como se esperaba!.

¿Qué pasa?. La existencia del *plano tangente* a S en $(0,0)$ requiere que la función sea diferenciable en este punto. Pero en este caso no es así:

$$f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)(x-x_0) + f_y(0,0)(y-y_0) + E(x,y)$$

$$\Longrightarrow \quad E(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Para que f sea diferenciable en $(0,0)$ se requiere que el límite

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

exista y sea $0.$ Pero

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} &= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Pues $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si usamos la trayectoria } y = x \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si usamos la trayectoria } y = -x \end{cases}$

Es decir, el límite no existe. Por tanto f no es diferenciable en $(0,0).$

• **¿Qué es la derivada de una función multivariada?.** En espacios de Banach (espacios vectoriales normados y completos) hay dos tipos de derivadas: La de Fréchet y la de Gâteaux. La derivada Fréchet extiende la idea de la derivada de las funciones de una variable real a las funciones en los espacios de Banach. La derivada de Gâteaux es una generalización del concepto de derivada direccional en el cálculo diferencial. Ambas derivadas se utilizan a menudo para formalizar la derivativa funcional que se utiliza comúnmente en la Física.

sobre funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ambas derivadas coinciden con la *derivada estándar* de estas funciones.

¿La derivada estándar?

Si $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable, lo que llamamos *derivada* es una matriz $D\mathbf{f}_{m\times n}(\mathbf{x})$ tal que

$$\lim_{\mathbf{x}\longrightarrow \mathbf{x}_0} \frac{||f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x_0}) - D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})||}{||\mathbf{x}-\mathbf{x_0}||} = 0, \qquad \mathbf{x},\, \mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$$

o, en otra forma,

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + J(\mathbf{x})\mathbf{h} + \mathbf{o}(1) \quad \text{con } \mathbf{x},\, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \quad \text{(No es la expansión de Taylor!)}$$

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$, entonces la matriz $D\mathbf{f}$ se llama *matriz Jacobiana*,

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\right]_{m\times n}$$

En el caso de la función escalar $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tenemos

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [\nabla \mathbf{f}]^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

En este caso *la derivada* de f es usual llamarla "el gradiente" de $\mathbf{f}$ y se denota $\nabla\mathbf{f} = (f_x, f_y)$ (en forma de vector). Esta derivada $\nabla f(p_1, p_2)$ es un vector en $\mathbb{R}^2$ que indica la dirección de máximo crecimiento (respecto a (p_1, p_2)) y su norma es la "rapidez" de este crecimiento!