Semana 5: Derivación Implícita

Derivadas Parciales: Derivada de una función definida de manera implícita

W. Mora. "Cálculo en Varias Variables."
http://www.matematicainteractivacr.com/

Las aplicaciones interactivas requieren haber instalado la aplicación gratuita Wolfram CDFPlayer
https://www.wolfram.com/cdf-player/

Wolfram CDF Player

Contenido

6.1 Derivadas de una función definida de manera implícita.

Supongamos que se conoce que z es una función de x e y, es decir, $z = f(x, y)$, pero que z *está definida de manera implícita* por una ecuación del tipo

$$F(x, y, z) = 0$$

Estas situaciones ya las hemos encontrado antes, por ejemplo en la ecuación de una esfera: $x^2+y^2+z^2 = a^2$. Esta ecuación define a z como una función de x y y y en este caso, z se puede despejar:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \text{ y } z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Cuando una función está definida de manera implícita, no siempre es posible despejarla: Si $y^2 + xz + z^2 - e^z - 1 = 0$ no hay posibilidad de despejar $z = z(x, y)$, aunque teóricamente podría ser posible en un entorno de algún punto. En todo caso, si podemos calcular las derivadas parciales.

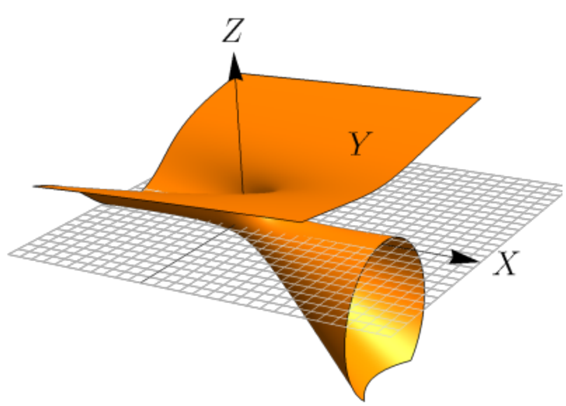


Figura 6.1: Superficie $S: \; y^2 + xz + z^2 - e^z - 1 = 0$

Podemos deducir, de manera informal, las fórmulas para z_x y z_y. Supongamos que $z = z(x, y)$ y que $F(x, y, z(x, y)) = 0$ y que en algún conjunto abierto D las derivadas parciales de z existen y la función F es diferenciable en D.

Sea $g(x,y) = F(x,y,z) = 0$, aplicando la regla de la cadena a $g(x,y) = F(u,v,w)$, con $x = u(x,y)$, $y = v(x,y)$ y $w(x,y) = z(x,y)$, obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w}\,\frac{\partial w}{\partial y}$$

Ahora, como $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, entonces

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 \cdot \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial w}\,\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Despejando,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{en todos los puntos de } D \text{ donde } \quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x,y,z(x,y))} \neq 0$$

De manera similar, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$

Teorema 6.1

Si F es diferenciable en un conjunto abierto D de $\mathbb{R}^n$ y si la ecuación $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ define a x_n como una función diferenciable $x_n = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ en algún conjunto abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}$$

en aquellos puntos en los que $\dfrac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0.$

Una función $z = z(x,y)$ definida de manera implícita por $F(x,y,z) = 0$.

Si $z = z(x,y)$ está definida de manera implícita por $F(x,y,z) = 0$, de acuerdo a las hipótesis del teorema 6.1, entonces

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

En el teorema de la función implícita podemos intercambiar variables. Por ejemplo, si x y z son las variables independientes y si se cumplen las hipótesis del teorema,

$$y_x = -\frac{F_x}{F_y} \quad \text{y} \quad y_z = -\frac{F_z}{F_y}.$$

Este teorema se puede generalizar para ecuaciones $F(x,y,z,u) = 0$.

Ejemplo 6.1

Sea z definida de manera implícita por $F(x,y,z) = xyz + x + y - z = 0$. Como se cumplen las condiciones del teorema 6.1 entonces

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{zy+1}{xy-1} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{zx+1}{xy-1}$$

Ejemplo 6.2

Calcule z_x y z_y si $F(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$ define a z como $z = z(x,y)$.

Solución: Dado que $F_x = 2x$, $F_y = -4y - z + 1$, $F_z = 6z - y$, entonces si $F_z \neq 0$,

$$z_x = -\frac{2x}{6z-y}$$

$$z_y = -\frac{1-4y-z}{6z-y}$$

en $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 6z(x,y) - y = 0.\}$

Ejemplo 6.3

Considere la función z definida de manera implícita por $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Calcular z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy} y z_{yx}

Solución:

z está definida de manera implícita por $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Entonces,

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{x}{z} \quad \text{y} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{y}{z}$$

Para calcular z_{xy}, z_{xx} y z_{yy} debemos notar que z_x y z_y *no son* funciones definidas de implícita, como tal derivamos de manera ordinaria.

$$z_{xx} = \frac{\partial(z_x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{z}\right) = -\frac{1\cdot z - x\,z_x}{z^2} = -\frac{z - x\left(-\frac{x}{z}\right)}{z^2},$$

$$z_{yy} = \frac{\partial(z_y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{z}\right) = -\frac{1\cdot z - y z_y}{z^2} = -\frac{z^2+y^2}{z^3},$$

$$z_{yx} = \frac{\partial(z_y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{z}\right) = \frac{y\cdot z_x}{z^2} = \frac{y\left(-\frac{x}{z}\right)}{z^2}.$$

Ejemplo 6.4

Si $F(xz, yz) = 0$ define a z como función implícita de x e y y además cumple con las condiciones del teorema 6.1 en cada punto de una región D, entonces verifique que, en D, se satisface la ecuación

$$y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = -z$$

Solución: Sea $u = xz$ y $v = yz$, entonces $F(xz, yz) = F(u, v) = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{F_u\cdot 0 + F_v\cdot z}{F_u\cdot x + F_v\cdot y}\\
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{F_u\cdot z + F_v\cdot 0}{F_u\cdot x + F_v\cdot y}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} &= -y\cdot\frac{F_v\cdot z}{F_u\cdot x + F_v\cdot y} + -x\cdot\frac{F_u\cdot z}{F_u\cdot x + F_v\cdot y}\\
&= -\frac{z\,(F_u\cdot x + F_v\cdot y)}{F_u\cdot x + F_v\cdot y}\\
&= -z
\end{aligned}$$

6.2 Ejercicios

Ⓡ **6.2.1** Si $x^2y^2 + \operatorname{sen}(xyz) + z^2 = 4$ define a z como función implícita de x e y, verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Ⓡ **6.2.2** Sea $z = f(z/xy)$ con f dos veces derivable. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ y verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Ⓡ **6.2.3** Sea $g\left(\dfrac{xy}{z},\, x^2+y^2\right) = 0$ una ecuación que define a z como una función de x e y. Verifique que si $g_x,\ g_y$ y g_z existen y son continuas en toda la región en la que $g_z \neq 0$, entonces

$$y\,\frac{\partial z}{\partial x} - x\,\frac{\partial z}{\partial y} = -\,\frac{z(x^2-y^2)}{xy}$$

Ⓡ **6.2.4** Supongamos que g es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ si $z = \dfrac{g(u,v)}{y^2}$ con $u = y^3$ y $v = x-2$

Ⓡ **6.2.5** Supongamos que g es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ si $z = g(y^3, x+2) + z^3$ define a z como función implícita de x y y.

Ⓡ **6.2.6** Sea $z = x\ln(yz)$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Ⓡ **6.2.7** Si $f(zx, y^2) = xy$ define a z como función implícita de x y y, calcule z_{xy}.

Ⓡ **6.2.8** Si $f(zx, y^2) + g(z^2) = 5$ define a z como función implícita de x y y. Calcule z_x y z_y

Ⓡ **6.2.9** Sea f una función con derivadas de segundo orden continuas y g una función dos veces derivable. Supongamos que la ecuación $2g(z)+f(x^2\ , y) = 0$ define a $z = z(x,y)$ de manera implícita.

Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}\quad$ y $\quad\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Ⓡ **6.2.10** Sea f una función con derivadas de segundo orden continuas. Supongamos que la ecuación $zx + f(x^2, y^2) = 0$ define a $z = z(x,y)$ de manera implícita.

Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}\quad$ y $\quad\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Ⓡ **6.2.11** Sea f una función con derivadas de segundo orden continuas y g una función dos veces derivable. Supongamos que la ecuación $g(z)f^3(x^2\ , y) = 0$ define a z como funcón implícita de x y y. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Ⓡ **6.2.12** Sean F una función diferenciable y f una función derivable. La ecuación $F\left(f(xy),\ f(z^2)\right) = 0$ define a z como una función implícita de x y y Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Ⓡ **6.2.13** Sea z definida implícitamente por medio de la relación $z = x \cdot f\left(\dfrac{y}{z}\right)$ con f una función con derivada continua. Verifique que z satisface la ecuación:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

Ⓡ **6.2.14** Si $f(x,y) = \dfrac{\cos(7x-y)}{x}$, determine una constante K de tal manera que se cumpla la identidad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 7 \cdot f(x,y) + \frac{K}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

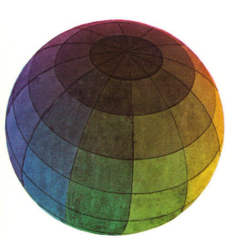
Ⓡ **6.2.15** Si $zx + e^{zy} = x$ define a z como función implícita de x y y, calcule z_x, z_y y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Ⓡ **6.2.16** Sea f una función con derivadas de segundo orden continuas y g una función dos veces derivable. Si $y = g(z^2) + f(y^2, x^2)$ define a z como función implícita de x y y, calcule z_x, z_y y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Ⓡ **6.2.17** La ecuación de Redlich-Kwong de dos parámetros es

$$\left[P + \frac{n^2 a}{\sqrt{T}V(V+nb)}\right][V - nb] - nRT = 0$$

donde a, b son parámetros, R es la constante de gas y n el número de moles. La función $T = T(P,V)$ está definida de manera implícita por esta ecuación. Calcule $\dfrac{\partial T}{\partial P}$.



Revisado: Marzo, 2022
Versión actualizada (correcciones, nuevos ejemplos y ejercicios) de este libro y las aplicaciones CDF:
https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

http://www.matematicainteractivacr.com/

6.3 Solución de los ejercicios

6.2.1 R

Sea $F(x,y,z) = x^2y^2 + \text{sen}(xyz) + z^2 - 4$. Si las derivadas parciales z_x y z_y existen en todo el dominio en el que $F_z \neq 0$, entonces

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{2xy^2 + yz\cos(xyz)}{xy\cos(xyz) + 2z}$

- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = -\dfrac{2x^2y + xz\cos(xyz)}{xy\cos(xyz) + 2z}$

- La identidad se obtiene sustituyendo y simplificando.

6.2.2 R Sea $F = z - f(u)$ con $u = z/xy$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-f'(u)\cdot\dfrac{-z}{x^2y}}{1 - f'(u)\cdot\dfrac{1}{xy}} = -\frac{z}{x}\cdot\frac{f'(u)}{xy - f'(u)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-f'(u)\cdot\dfrac{-z}{xy^2}}{1 - f'(u)\cdot\dfrac{1}{xy}} = -\frac{z}{y}\cdot\frac{f'(u)}{xy - f'(u)}.$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = -x\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{f'(u)}{xy - f'(u)} - y\cdot -\frac{z}{y}\cdot\frac{f'(u)}{xy - f'(u)} = 0 \quad \surd$$

6.2.3 R En este caso, $F = g\left(\dfrac{xy}{z},\, x^2 + y^2\right)$.

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{g_x}{g_z} = -\dfrac{g_u\cdot\dfrac{y}{z} + g_v\cdot 2x}{-g_u\cdot\dfrac{xy}{z^2}}$

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{g_y}{g_z} = -\dfrac{g_u\cdot\dfrac{x}{z} + g_v\cdot 2y}{-g_u\cdot\dfrac{xy}{z^2}}$

- $y\cdot\dfrac{g_u\cdot\dfrac{y}{z} + g_v\cdot 2x}{g_u\cdot\dfrac{xy}{z^2}} - x\cdot\dfrac{g_u\cdot\dfrac{x}{z} + g_v\cdot 2y}{g_u\cdot\dfrac{xy}{z^2}} = -\dfrac{g_u\left(\dfrac{x^2-y^2}{z}\right)}{g_u\cdot\dfrac{xy}{z^2}} = -\dfrac{z(x^2-y^2)}{xy} \quad \surd$

6.2.4 R

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y^2}\left(\cdot\dfrac{\partial g}{\partial u}\cdot 0 + \dfrac{\partial g}{\partial v}\cdot 1\right) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\dfrac{\partial g}{\partial v}}{y^2}\right) = \dfrac{3y^4\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u} - 2y\cdot\dfrac{\partial g}{\partial v}}{y^4} \end{cases}$$

6.2.5 Sea $F(x,y,z) = z^3 + g(A,B) - z = 0$ con $A = y^3$ y $B = x+2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial B}}{3z^2-1}$$

Ahora, de nuevo $z = z(x,y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial B}}{3z^2-1}\right) = -\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial A \partial B}\cdot 1 \cdot (3z^2-1) - \left(6z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial g}{\partial B}}{(3z^2-1)^2}$$

6.2.6 La primera derivada se hace derivando implícitamente; las segundas derivadas son derivadas ordinarias.

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{z\ln(yz)}{x-z}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{z\ln(yz)}{x-z}\right] = -\frac{\left[\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\ln(yz) + z\cdot\frac{y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{yz}\right](x-z) - \left(1-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot z\ln(yz)}{(x-z)^2}$$

$$= -\frac{\left[-\frac{z\ln(yz)}{x-z}\cdot\ln(yz) + z\cdot\frac{y\cdot -\frac{z\ln(yz)}{x-z}}{yz}\right](x-z) - \left(1+\frac{z\ln(yz)}{x-z}\right)\cdot z\ln(yz)}{(x-z)^2}$$

- $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{xz}{y(x-z)}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{xz}{y(x-z)}\right] = -\frac{x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y(x-z) - \left(x-z-y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot xz}{y^2(x-z)^2}$$

$$= \frac{x\cdot\frac{xz}{y(x-z)}\cdot y(x-z) - \left(x-z-y\cdot\frac{xz}{y(x-z)}\right)\cdot xz}{y^2(x-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{xz}{y(x-z)}\right] = -\frac{\left(z+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot y(x-z) - \left(y-y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot xz}{y^2(x-z)^2}$$

$$= -\frac{\left(z+x\cdot -\frac{z\ln(yz)}{x-z}\right)\cdot y(x-z) - \left(y-y\cdot -\frac{z\ln(yz)}{x-z}\right)\cdot xz}{y^2(x-z)^2}$$

6.2.7 Sea $F(x,y,z) = f(u,v) - xy$ con $u = zx$ y $v = y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y - x}{\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y - x}{\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot x}\right) = -\frac{\left(2y\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\cdot\left[z + x\dfrac{\partial z}{\partial x}\right] - 1\right)\cdot\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot x \;-\; \left(\dfrac{\partial f}{\partial u} + x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial u^2}\left[z + x\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]\right)\cdot\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y - x\right)}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot x\right)^2}$$

6.2.8

6.2.9 Sea $F(x,y,z) = 2g(z) + f(A,y) = 0$ con $A = x^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial A}\cdot 2x}{2g'(z)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial A}\cdot 2x}{2g'(z)}\right) = \frac{\left(2x\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial A}\right)(2g'(z)) \;-\; 2g''(z)\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial A}\cdot 2x\right)}{(2g'(z))^2}$$

6.2.10

6.2.11

6.2.12 Tenemos $F(u,v) = 0$ con $u = f(A)$, $v = f(B)$ y $A = xy$ y $B = z^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot f'(A)\cdot y + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot f'(B)\cdot 0}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot f'(A)\cdot 0 + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot f'(B)\cdot 2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot f'(A)\cdot x + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot f'(B)\cdot 0}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot f'(A)\cdot 0 + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot f'(B)\cdot 2z}$$

6.2.13

6.2.14 $K = -1$

6.2.15

6.2.16 $F(x,y,z) = y - g(u) - f(v,w)$ con $u = z^2$, $v = y^2$, $w = x^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x\dfrac{\partial f}{\partial w}}{-2zg'(u)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-2y\dfrac{\partial f}{\partial v}}{2zg'(u)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\left(-2\,\dfrac{\partial f}{\partial v} - 4y^2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)(2zg'(u)) - \left(2\dfrac{\partial z}{\partial y}\,g'(u) + 4z^2 g''(u)\,\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\left(1-2y\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)}{[2zg'(u)]^2}
\end{aligned}$$

6.2.17 ↰ Ⓡ